Mechanika a kontinuum NAFY001

Jaroslav Kohout – katedra fyziky nízkých teplot
Tel: 221 912 771
jaroslav.kohout@mff.cuni.cz

http://www.kfnt.mff.cuni.cz → výuka → Mechanika a kontinuum NAFY001

Doporučená literatura:

- J. Kvasnica, „Mechanika“, (Academia, Praha 1988).
- R.P. Feynman, “Feynmanovy přednášky z fyziky 1” (Fragment, Praha, 2000).
- I.G.Main: Kmity a vlny ve fyzice, Academia, Praha 1990
- F. Chmelík: Fyzika I – mechanika, skripta
  http://material.karlov.mff.cuni.cz/people/hajek/skripta/skripta.pdf

Mechanika a kontinuum

zkouška:

• nutnou podmínkou připuštění k ústní zkoušce je získání zápočtu ze cvičení

• tj. úspěšné absolvování 2 písemných testů

- alespoň 21 bodů v součtu z obou testů
- za každý test lze získat maximálně 20 bodů
- známkování: 20-16 bodů = **1**, 15-11 bodů = **2**, 10-5 bodů = **3**

• celková známka ze zkoušky:

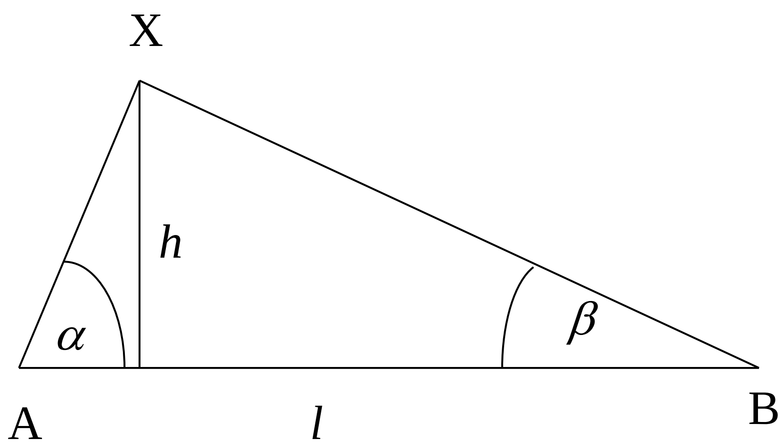
$$z = \frac{1}{3}\left(\frac{z_{p1} + z_{p2}}{2}\right) + \frac{2}{3} z_u$$

z_{p1}, z_{p2} – známky z písemných testů

z_u – známka z ústní zkoušky

Měření vzdáleností - triangulace

- **triangulace**



- obecně:

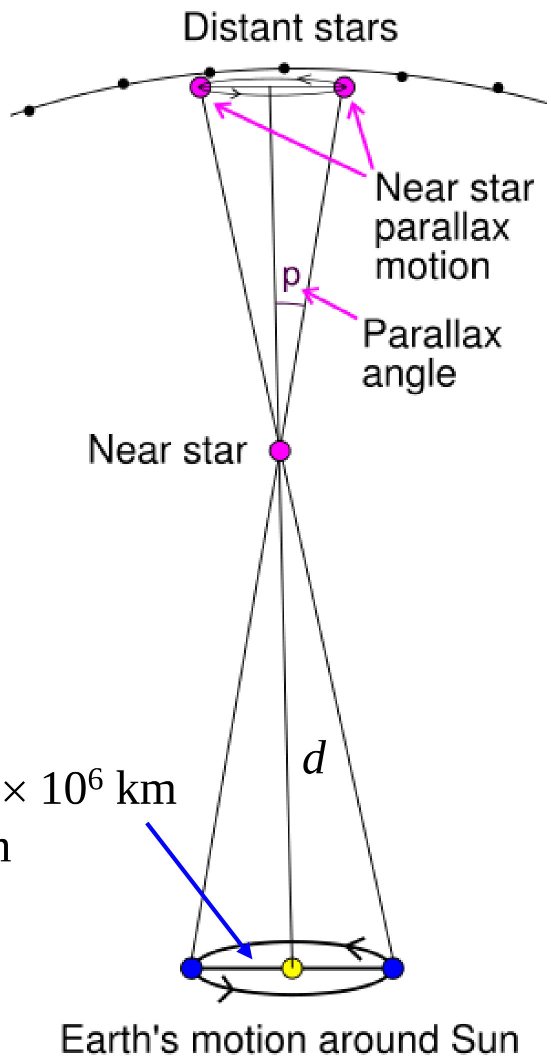
$$h = l\,\frac{\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}$$

- rovnoramenný trojúhelník ($\alpha = \beta$):

$$h = \frac{l}{2}\,\mathrm{tg}\alpha$$

Měření vzdáleností - triangulace

- **paralaxa**



$1\text{AU} = 150 \times 10^6$ km
$= 1.5\times10^8$ m

úhlové jednotky:

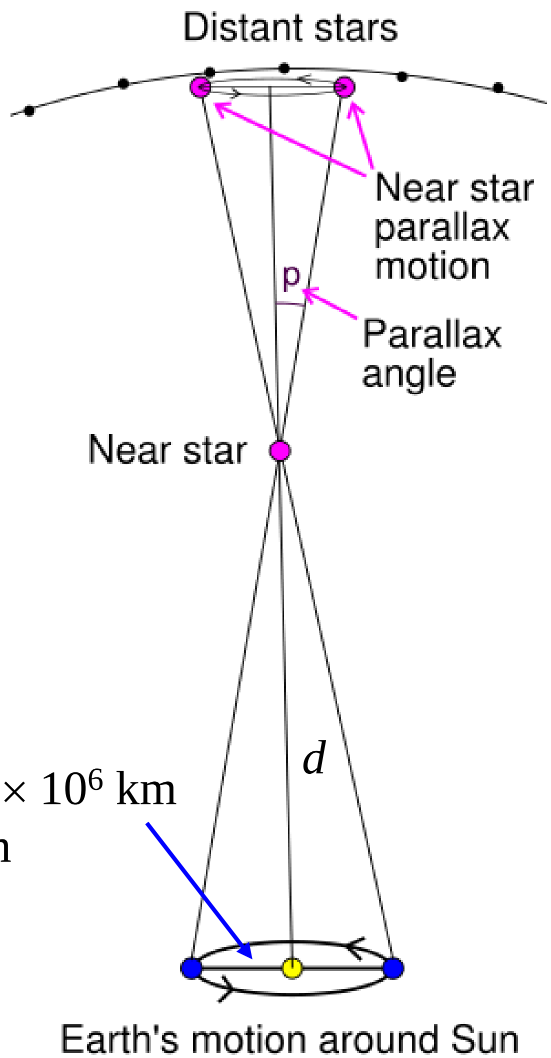
název	**symbol**	**hodnota**	**v radiánech**
1 stupeň	[º], [deg.]	1/360 kruhu	0.017453 rad
1 minuta	[`], [arcmin]	1/60 stupně	0.29089 mrad
1 vteřina	[``], [arcsec]	1/60 minuty	4.8481 μrad

$$d = \frac{2\text{AU}}{2} \operatorname{cotg} p = \frac{1\text{AU}}{\operatorname{tg} p} \approx \frac{1\text{AU}}{p}$$

$\operatorname{tg} p = p + p^3/3 + \ldots \sim p$

Měření vzdáleností - triangulace

- **paralaxa**



1AU = 150 × 10^{6} km
= 1.5×10^{8} m

p [arcsec] – roční paralaxa hvězdy

1 parsec (pc) = taková vzdálenost, že p = 1 arcsec

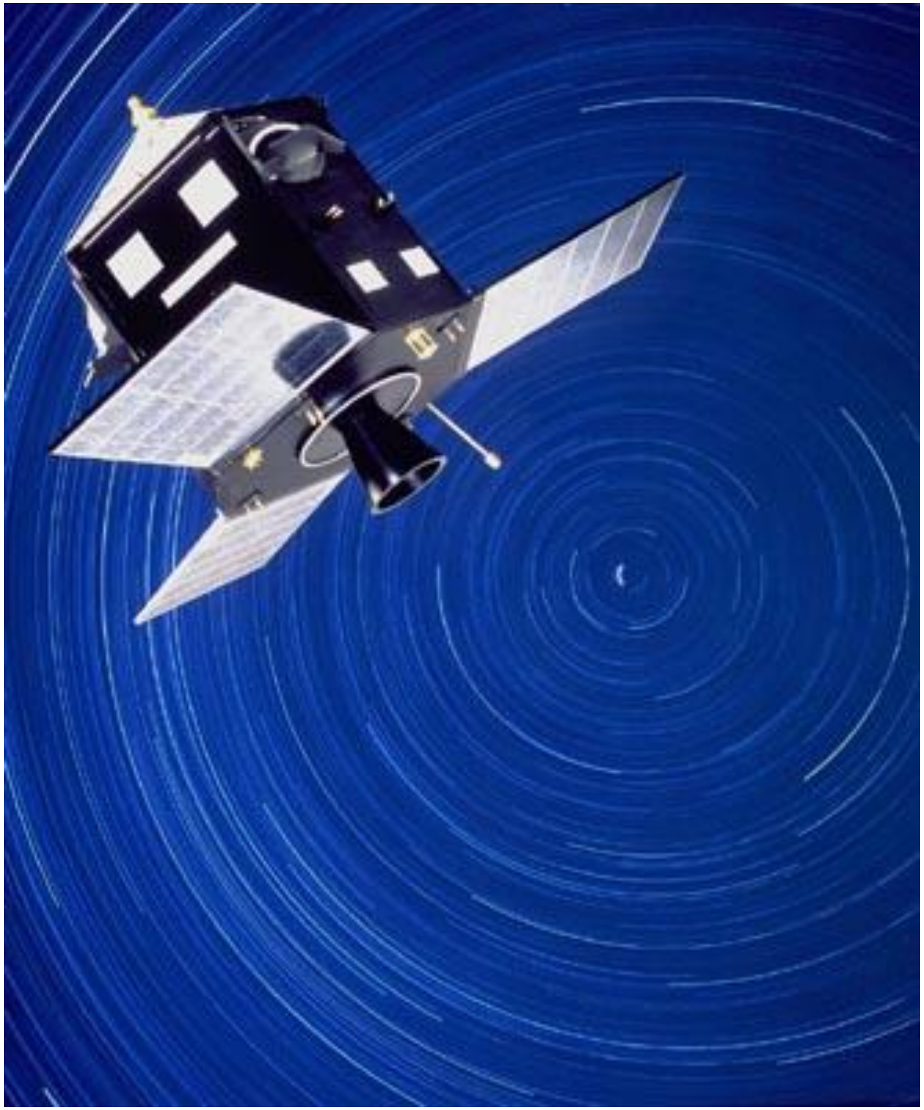
1 pc = 3.26 sv. rok

1 sv. rok = 9.46073 × 10^{15} m = 9.46073 Pm

$$d[\mathrm{pc}] = \frac{1}{p[\mathrm{arc\,sec}]}$$

Proxima Centauri (nejbližší hvězda)
d = 1.30 pc = 4.24 sv. rok

Měření vzdáleností - triangulace



p [arcsec] – roční paralaxa hvězdy

1 parsec (pc) = taková vzdálenost, že p = 1 arcsec

1 pc = 3.26 sv. rok

1 sv. rok = $9.46073 \cdot 10^{15}$ m = 9.46073 Pm

$$d[\mathrm{pc}] = \frac{1}{p[\mathrm{arc\,sec}]}$$

Proxima Centauri (nejbližší hvězda)
d = 1.30 pc = 4.24 sv. rok

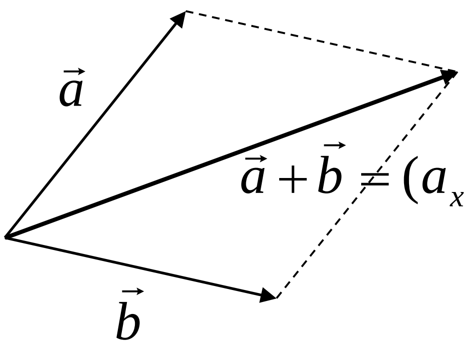
satelit Hipparcos (ESA)
měření p až do 0.002 arcsec

maximální vzdálenost d = 500 pc (≈1600 sv. rok)

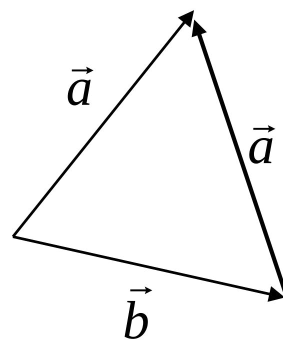
Vektorové fyzikální veličiny

- **velikost vektoru:** $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (skalár) často se píše: $\left|\vec{a}\right| \equiv a$

- **součet / rozdíl vektorů:**

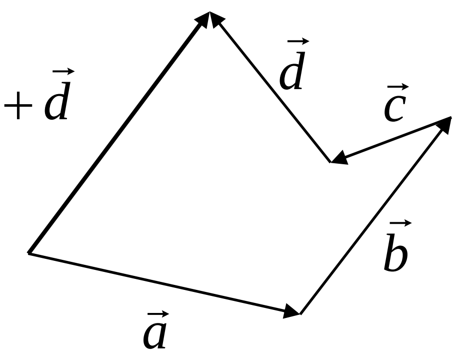


$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$



$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

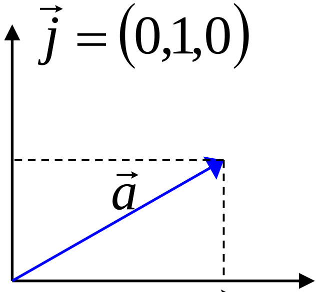


Vektorové fyzikální veličiny

- **skalární součin:** $\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$ (skalár)

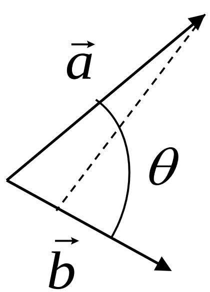
$\vec{j} = (0,1,0)$

$a_y = \vec{a}\,\vec{j}$



$\vec{i} = (1,0,0)$

$a_x = \vec{a}\,\vec{i}$

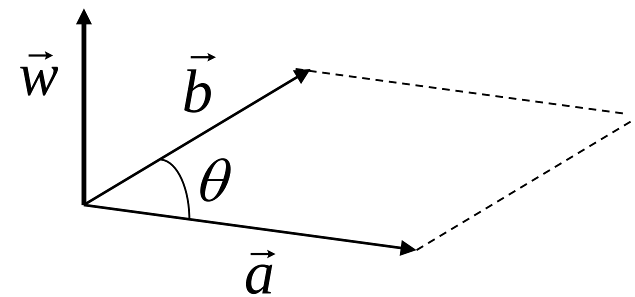


velikost průmětu vektoru *a* do směru *b*: $\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{b}|} = a\cos\theta$

Vektorové fyzikální veličiny

• **vektorový součin v 3D:**

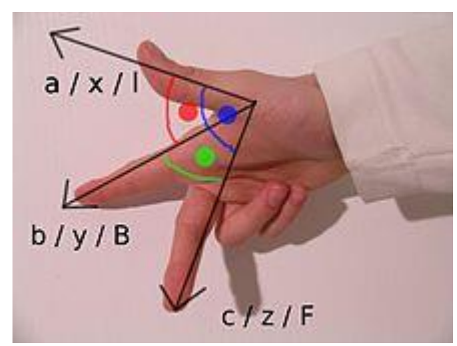
$$\vec{w} \equiv \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\right)$$

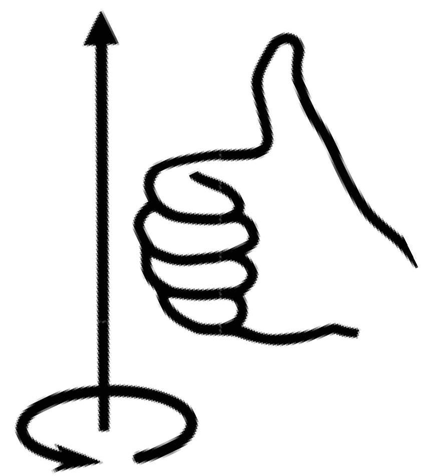


(vektor kolmý na $\vec{a}$ a $\vec{b}$) $\vec{w}\,\vec{a} = 0$ $\vec{w}\,\vec{b} = 0$

$$\left|\vec{w}\right| \equiv w = ab \sin\theta$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{w}$ tvoří pravotočivý systém





Kartézská soustava souřadnic

• **polohový (radius) vektor**

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x, y, z)$$

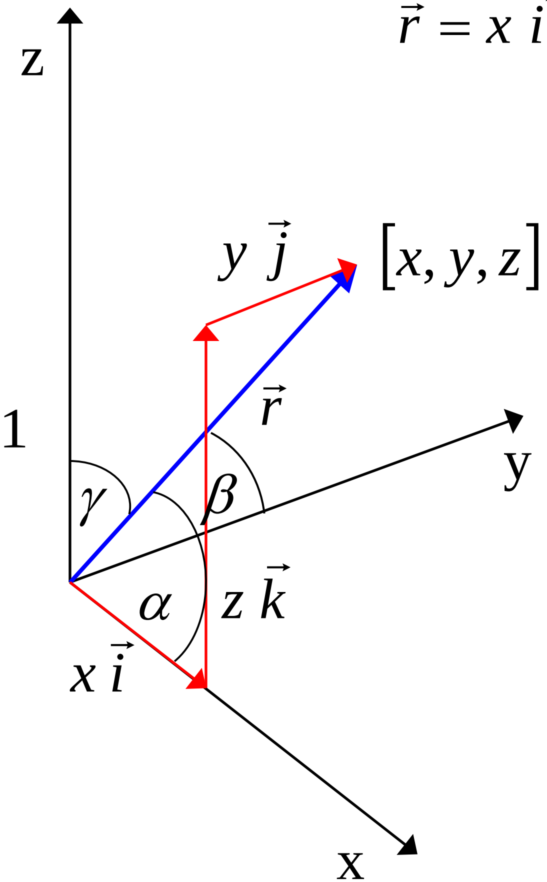
směrové kosiny:

$$\vec{r}\,\vec{i} = x = r\cos\alpha$$

$$\vec{r}\,\vec{j} = y = r\cos\beta$$

$$\vec{r}\,\vec{k} = z = r\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



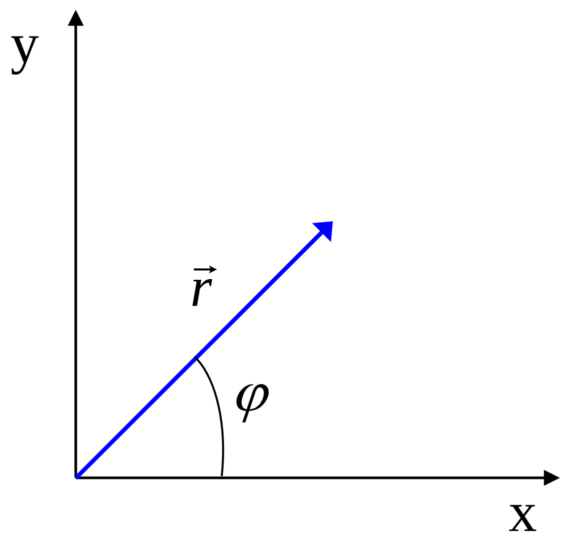
velikost polohového vektoru:

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Polární souřadnice

• kartézské souřadnice: *x*, *y*

• obecné souřadnice: *r*, *φ*



$$x = r\cos\varphi$$

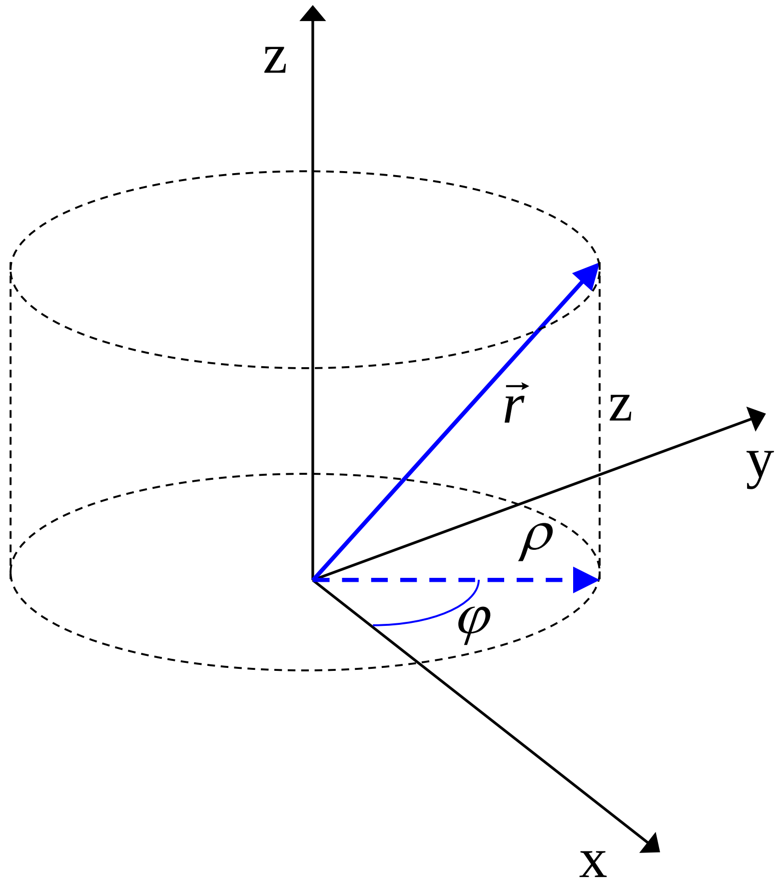
$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Cylindrická soustava souřadnic

- kartézská soustava souřadnic: x, y, z
- cylindrická (válcová) soustava souřadnic: ρ, φ, z

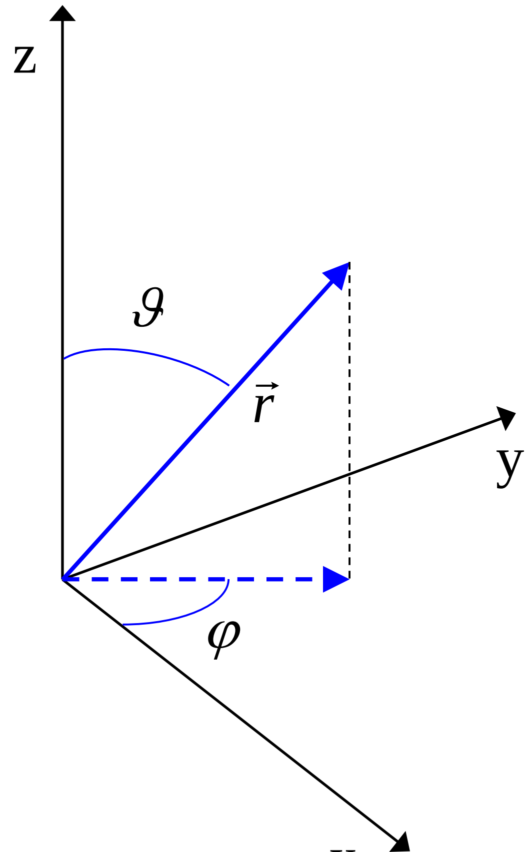


$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$
$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Sférická soustava souřadnic

- kartézská soustava souřadnic: x, y, z
- sférická soustava souřadnic: r, ϑ, φ



$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Kinematika

- **hmotný bod:** těleso s nekonečně malými rozměry, ale nenulovou hmotností,
  tj. žádné otáčení, žádná deformace atd.

- popis pohybu hmotného bodu – tj. poloha hmotného bodu v závislosti na čase

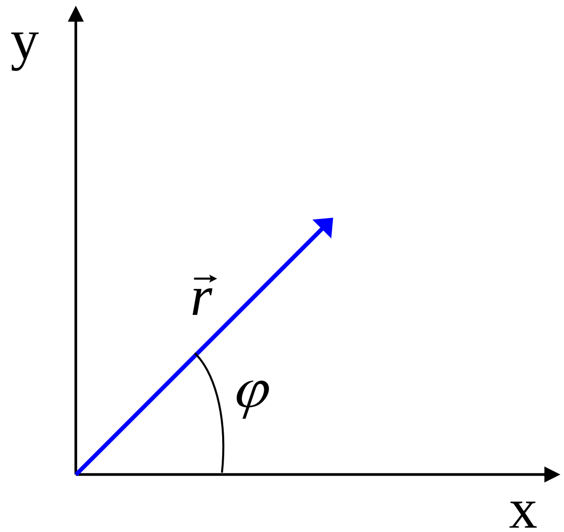
- polohový (radius) vektor $\vec{r}$

- **trajektorie**: křivka, kterou vytváří koncový bod polohového vektoru

- parametrické vyjádření trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$x = x(t)$	$\rho = \rho(t)$	$r = r(t)$
$y = y(t)$	$\varphi = \varphi(t)$	$\vartheta = \vartheta(t)$
$z = z(t)$	$z = z(t)$	$\varphi = \varphi(t)$

Trajektorie kruhového pohybu



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

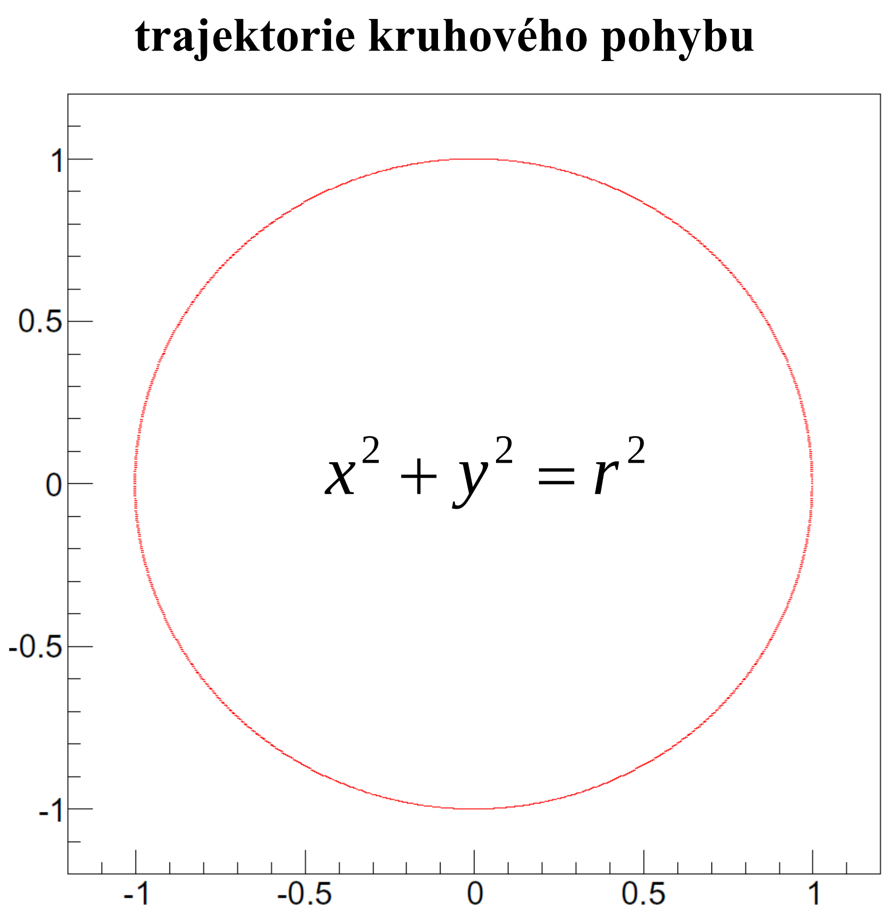
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f}$$ - perioda

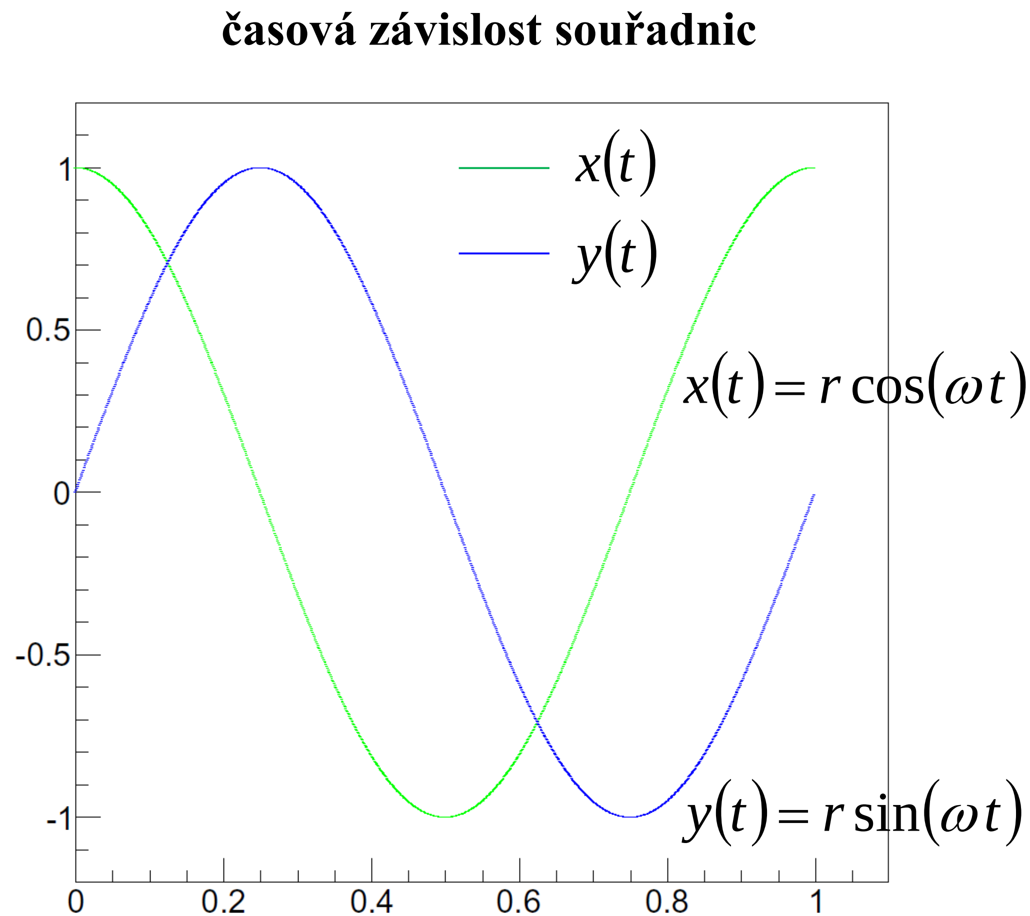
• Neparametrickou rovnici dráhy pohybu (kružnici) lze získat vyloučením parametru *t:*

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t) = r^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Trajektorie kruhového pohybu





Trajektorie

cylindrické souřadnice

$$\rho(t) = \rho$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

$$z(t) = v t$$

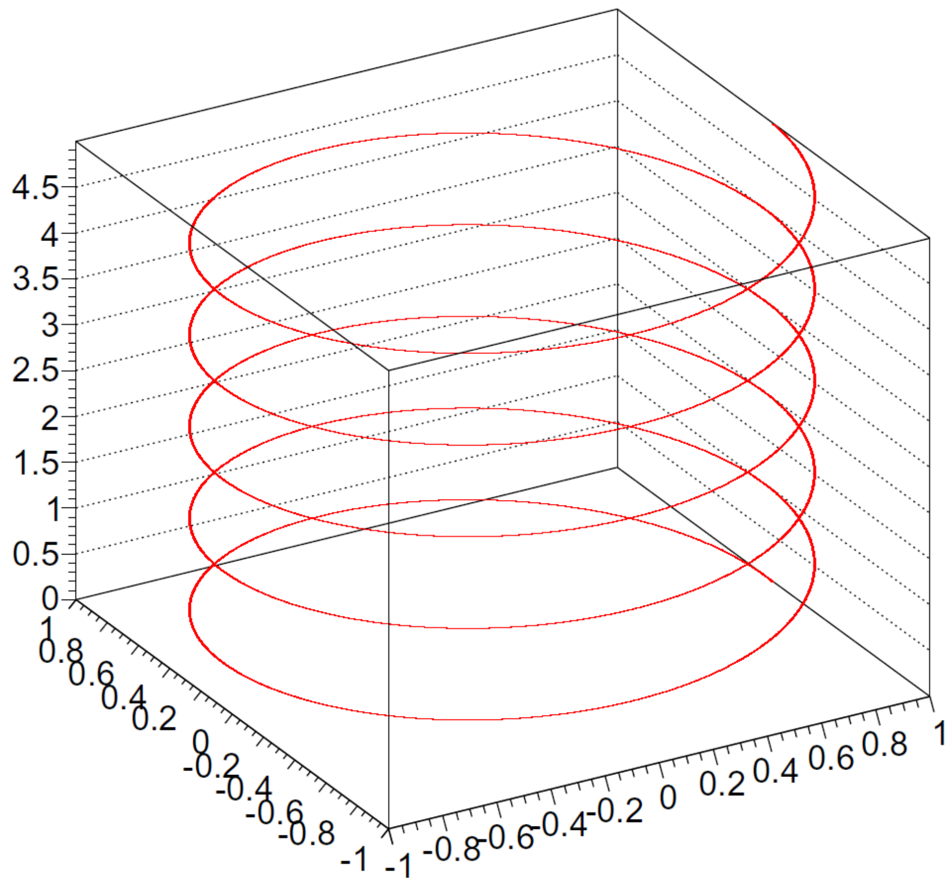
kartézské souřadnice

$$x(t) = \rho \cos(\omega t)$$

$$y(t) = \rho \sin(\omega t)$$

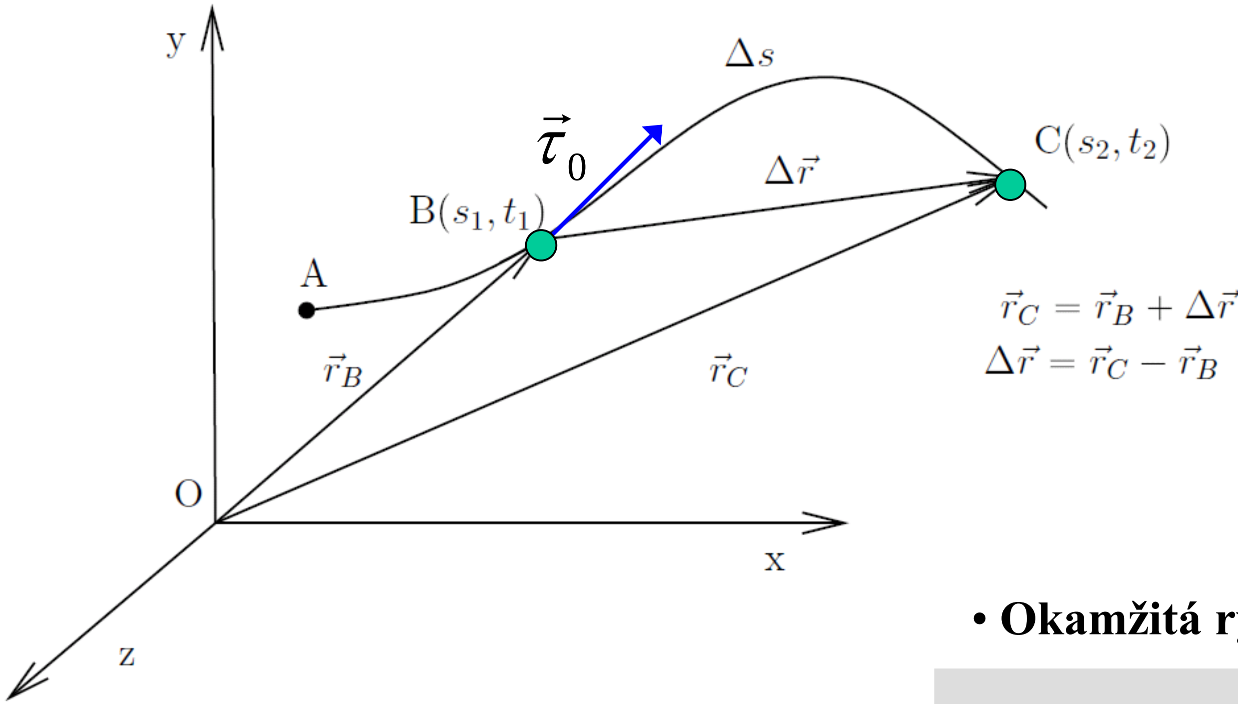
$$z(t) = v t$$

$$z(T) = \rho = v T \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\rho}{T}$$



Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



- Při přibližování bodu C k bodu B přejde $\Delta\vec{r}$ na vektor $d\vec{r}$, který bude mít směr tečny k dráze $\vec{\tau}_0$ a velikost ds.
  Potom:

$$d\vec{r} = ds \cdot \vec{\tau}_0$$

- **Okamžitá rychlost hmotného bodu:**

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Rychlost

Okamžitá rychlost je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, ve kterém okamžitou rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu**:**

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

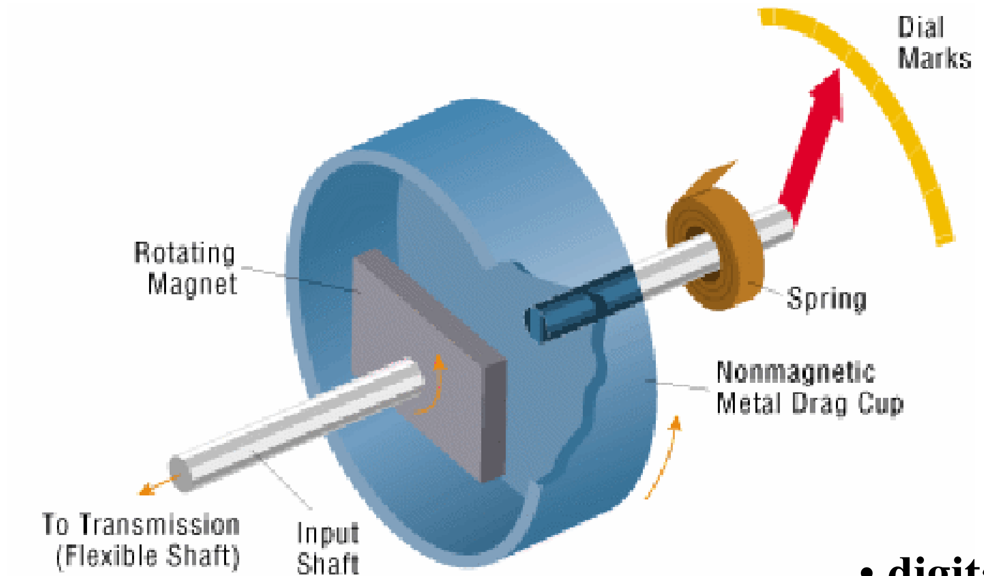
- **přímočarý pohyb** – nemění se směr rychlosti $\vec{\tau}_0$
- **rovnoměrný pohyb** – nemění se velikost rychlosti:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad [\mathrm{m/s}]$$

Tachometr

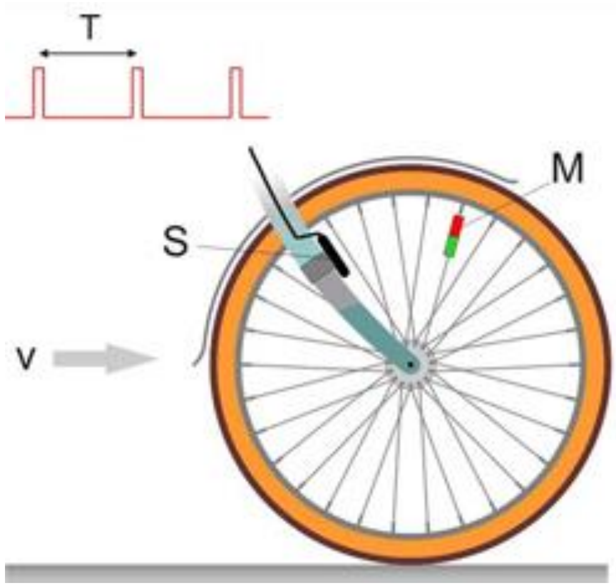
- **analogový**

  - Otto Schulze 1902

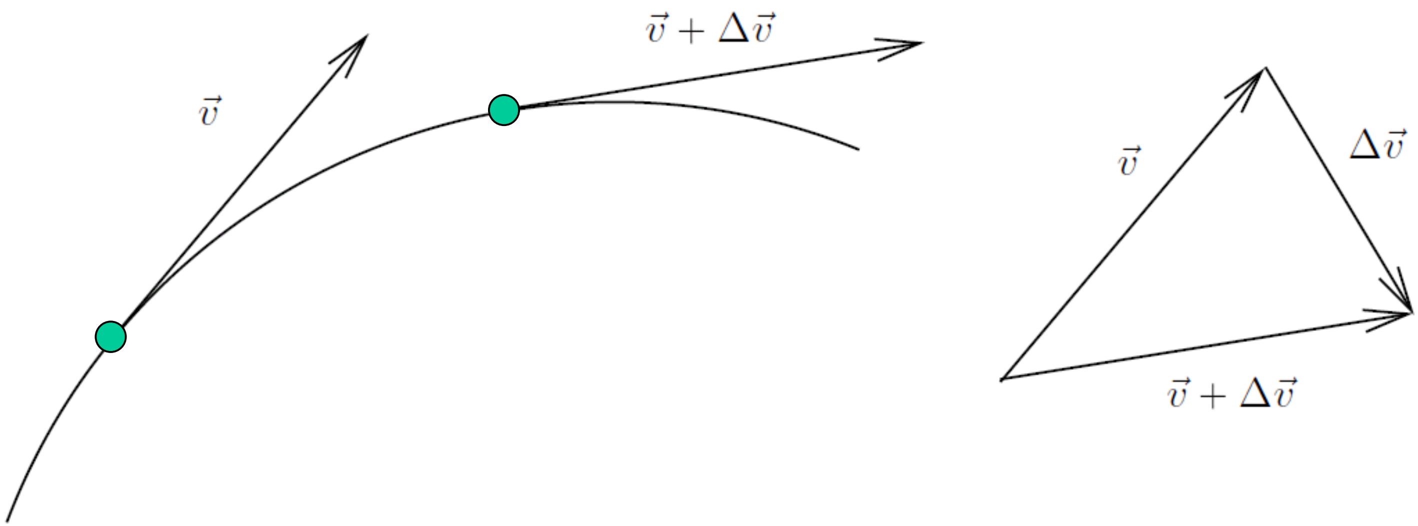


- **digitální**

- **digitální**



Zrychlení



• při obecném **křivočarém pohybu** se mění jak směr, tak jeho rychlost pohybu hmotného bodu

• **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Zrychlení

• **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

• **zrychlení** hmotného bodu je vektor jehož směr je totožný s přírůstkem rychlosti $\mathrm{d}\vec{v}$

• **velikost zrychlení**:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} \quad \left[\mathrm{m/s}^2\right]$$

Klasifikace pohybů a jejich příklady

Pohyb dělíme na

- přímočarý, který se děje v přímce
- křivočarý, což jsou všechny ostatní případy.

Dalším kritériem je velikost rychlosti:

- pohyb je rovnoměrný při $|\vec{v}| = konst.$
- pohyb je nerovnoměrný při $|\vec{v}| \neq konst.$

- **Přímočarý rovnoměrě zrychlený pohyb:**

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = at + v_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a$$

- **Přímočarý pohyb** hmotného bodu**:**

$$x = x(t),\ y = 0,\ z = 0$$

- **Přímočarý rovnoměrný pohyb:**

$$x = v_0 t + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

Klasifikace pohybů a jejich příklady

- **harmonický pohyb po přímce:**

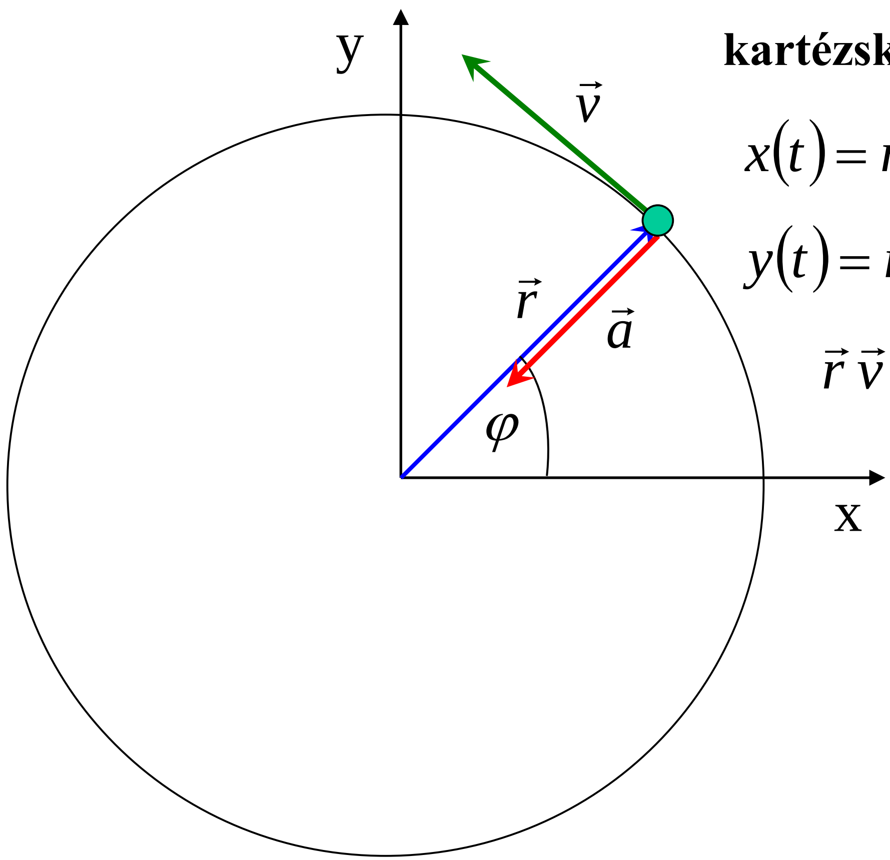
$$x = A\sin(\omega t + \alpha) + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 (x - x_0)$$

- Zrychlení harmonického pohybu je tedy úměrné výchylce a míří proti ní.

Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

$$\vec{r}\,\vec{v} = -r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$$

$$v = \sqrt{\omega^2 r^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)} = \omega r$$

zrychlení

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -r\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

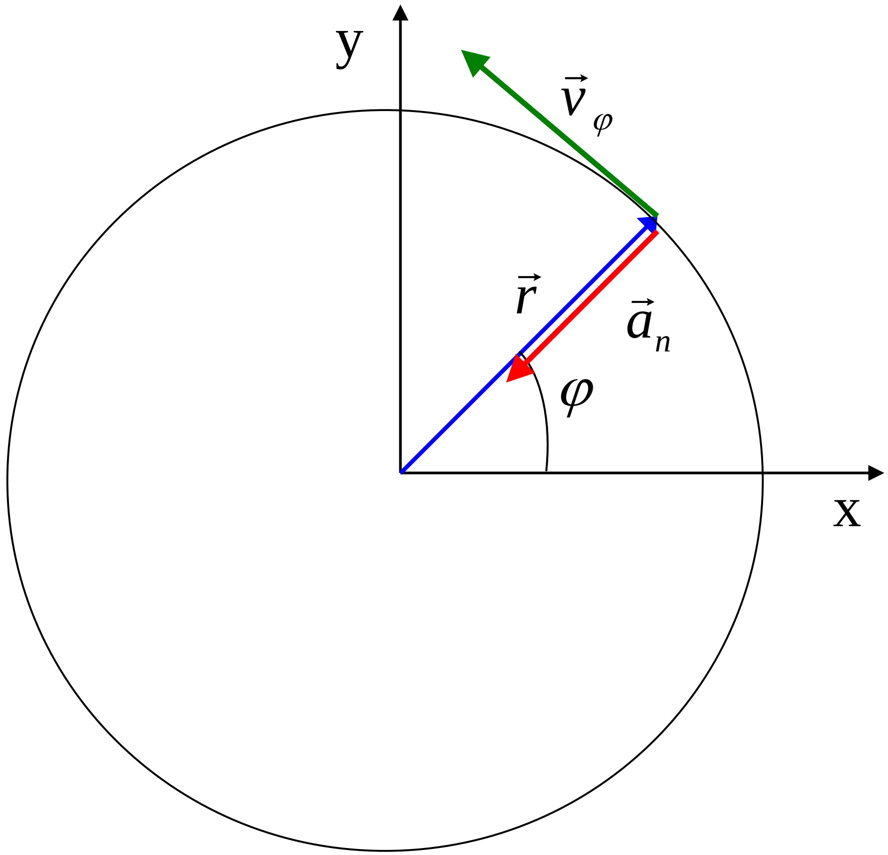
$$a = \sqrt{r^2\omega^4\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

ω - úhlová rychlost $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$ - perioda

Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

rychlost

$$v_r(t) = \dot{r}(t) = 0$$ - radiální rychlost

$$v_\varphi(t) = r\dot{\varphi}(t) = r\omega$$ - tečná (tangenciální rychlost)

zrychlení

$$a_n(t) = -\frac{v^2}{r}$$ - normálové zrychlení

$$a_t(t) = 0$$ - tečné zrychlení

ω - úhlová rychlost $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

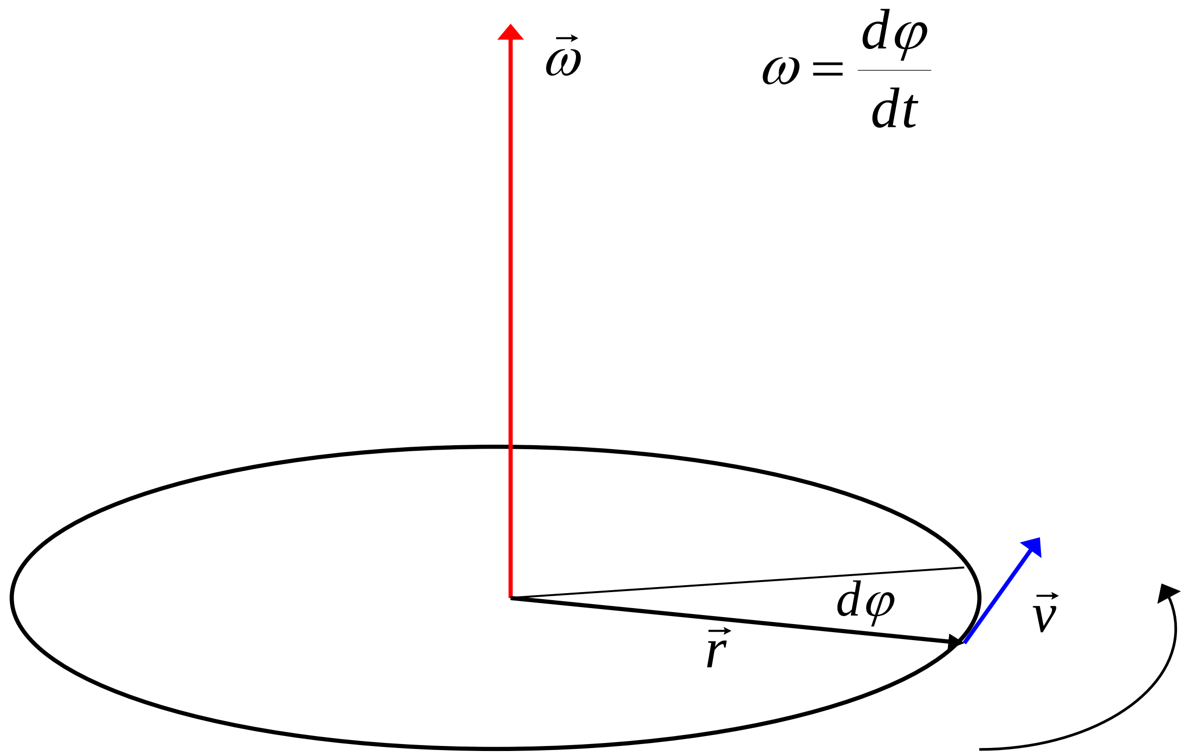
Úhlová rychlost a zrychlení

- **vektor úhlové rychlosti**

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

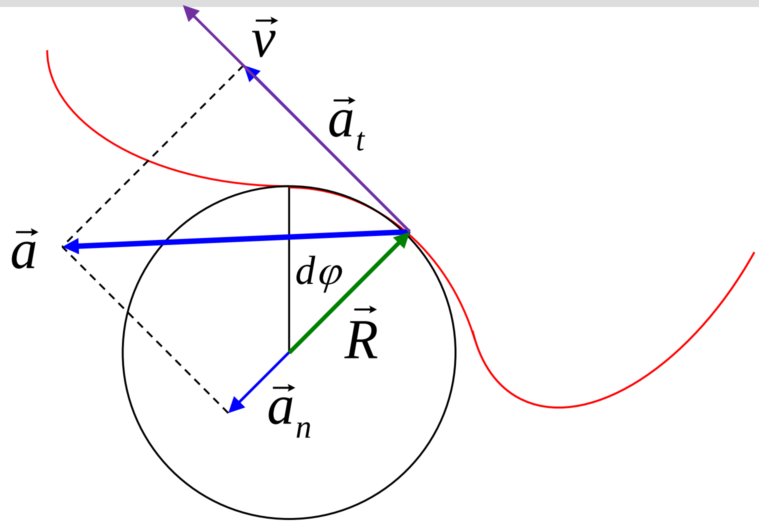
- **úhlové zrychlení**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{dt}$$



$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Tečné a normálové zrychlení



• **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

• **Tečné zrychlení** získáme průmětem vektoru zrychlení $\vec{a}$ do směru rychlosti $\vec{\tau}_0 = \dfrac{\vec{v}}{v}$ a vynásobením jednotkovým vektorem ve směru rychlosti:

$$\vec{a}_t = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \frac{2v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+2v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+2v_z\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

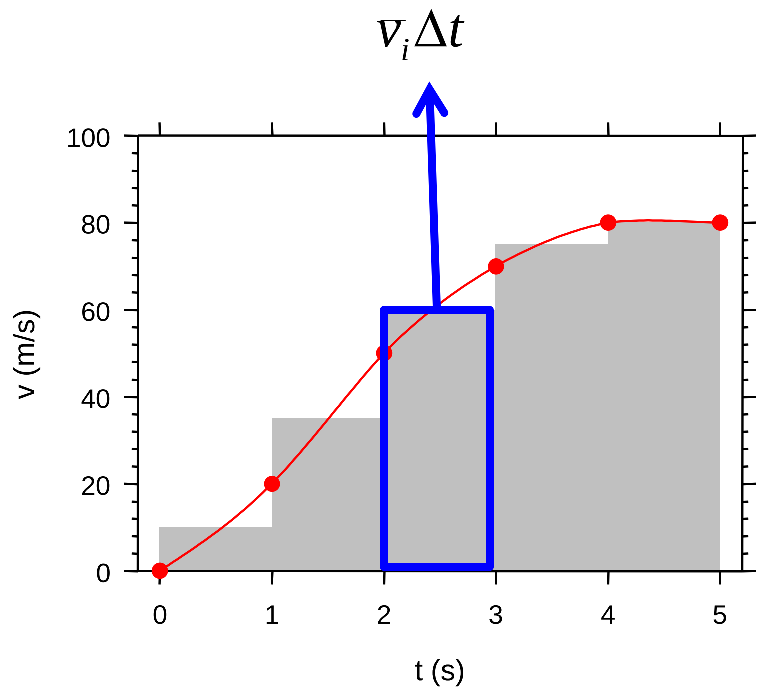
• **Normálové zrychlení:**

$$\vec{a}_n = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R}\right)\frac{\vec{R}}{R} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

Dráha

- dráha: délka trajektorie

t (s)	v (m/s)
0	0
1	20
2	50
3	70
4	80
5	80

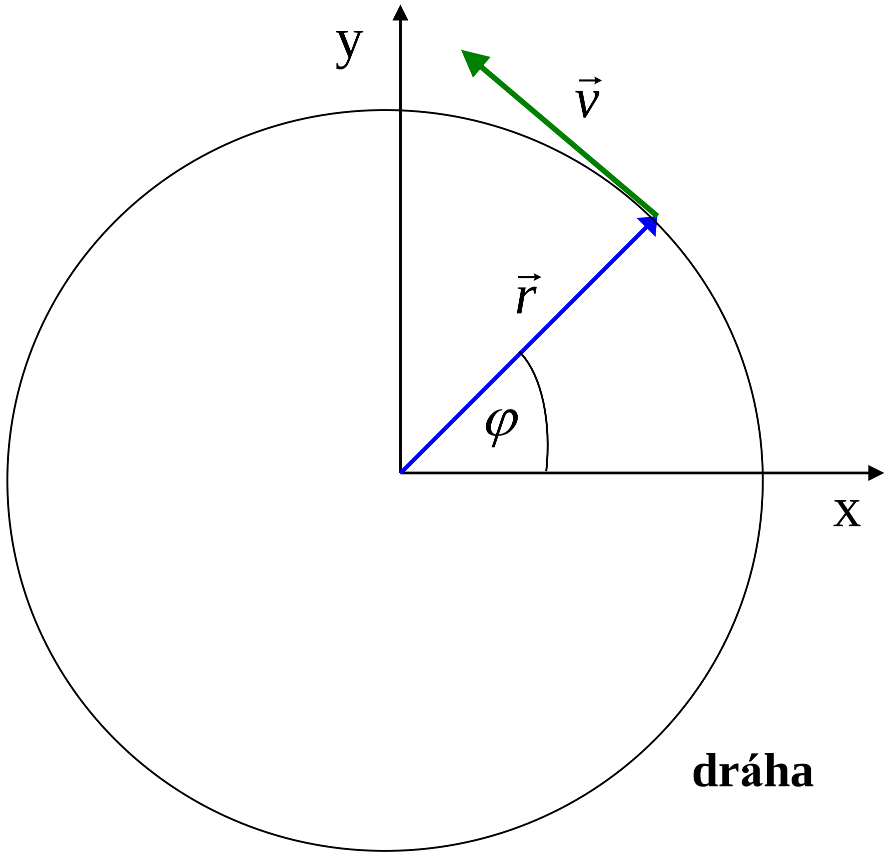


- dráha: $s = \sum_i v_i \Delta t$

- dráha, kterou urazil hmotný bod:

$$s \equiv \int \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right]^{1/2} \mathrm{d}t = \int v(t) \mathrm{d}t$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

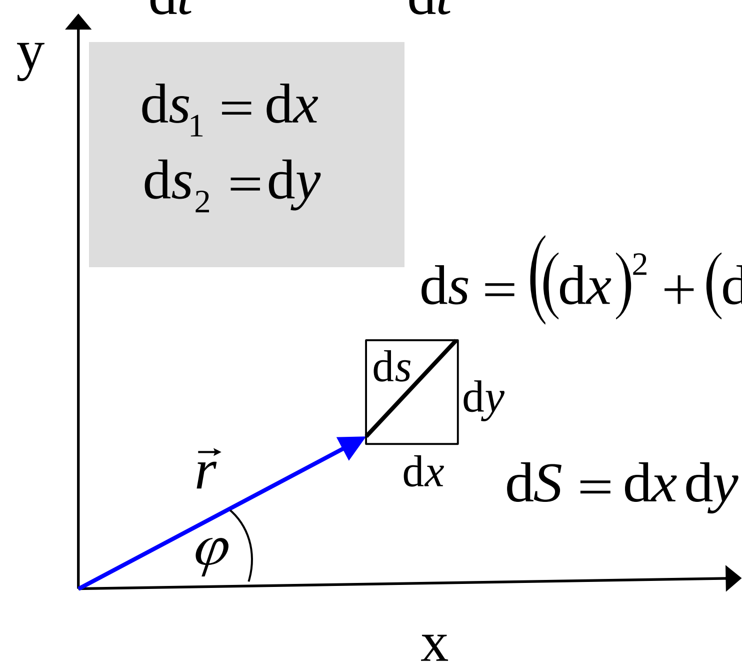
$$s = \int_0^T \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}t = \int_0^T r\omega\, dt = \left[\frac{2\pi r}{T} t\right]_0^T = 2\pi r$$

Obloukový element křivky 2D

kartézské souřadnice:

$$\mathrm{d}s = \left(\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}t$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \; v_x = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$$



$$\mathrm{d}s_1 = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}s_2 = \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 \right)^{1/2}$$

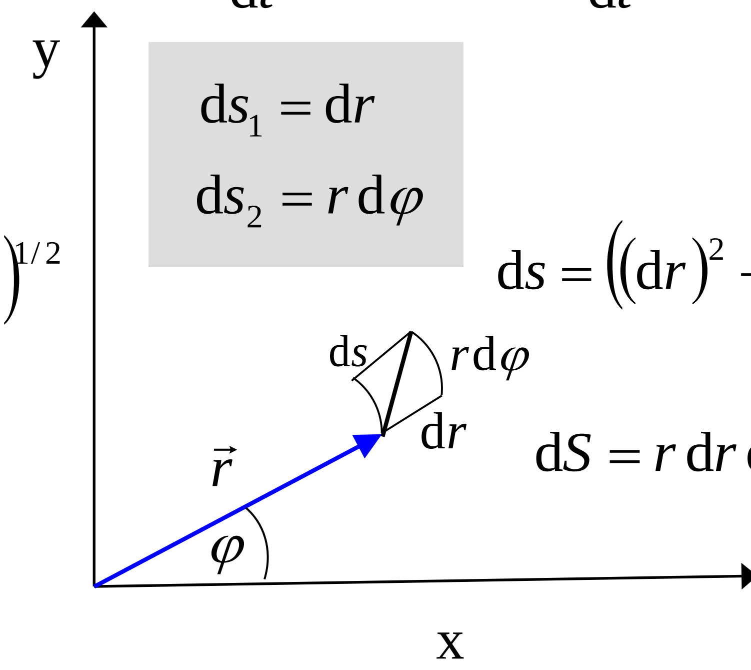
$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

polární souřadnice:

$$x = r(t)\cos\varphi(t) \qquad \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \cos\varphi\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}t - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$$
$$y = r(t)\sin\varphi(t) \qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \sin\varphi\,\mathrm{d}r/dt + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s = \left(\left(\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(r(t)\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}t$$

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}, \; v_\varphi = r(t)\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$$



$$\mathrm{d}s_1 = \mathrm{d}r$$
$$\mathrm{d}s_2 = r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\varphi)^2 \right)^{1/2}$$

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Obloukový element křivky 3D

- parametrické vyjádření trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$x = x(t)$	$\rho = \rho(t)$	$r = r(t)$
$y = y(t)$	$\varphi = \varphi(t)$	$\vartheta = \vartheta(t)$
$z = z(t)$	$z = z(t)$	$\varphi = \varphi(t)$

- rychlost $\vec{v} = \vec{v}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$v_x = \dot{x}$	$v_\rho = \dot{\rho}$	$v_r = \dot{r}$
$v_y = \dot{y}$	$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$	$v_\vartheta = r\dot{\vartheta}$
$v_z = \dot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$v_\varphi = r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}$

Obloukový element křivky 3D

kartézská soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

cylidrická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho\,\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

sférická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\vartheta)^2 + (r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi)^2\right)^{1/2}$

$\mathrm{d}s_i = h_i \mathrm{d}q_i$ $\quad \mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}s_1)^2 + (\mathrm{d}s_2)^2 + (\mathrm{d}s_3)^2\right)^{1/2} = \left((h_1\mathrm{d}q_1)^2 + (h_2\mathrm{d}q_2)^2 + (h_3\mathrm{d}q_3)^2\right)^{1/2}$

h_i – Laméovy koeficienty

soustava souřadnic	h_1	h_2	h_3	q_1	q_2	q_3
kartézská	1	1	1	x	y	z
cylindrická	1	ρ	1	ρ	φ	z
sférická	1	r	$r\sin\vartheta$	r	ϑ	φ

Objemový element: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = h_1\mathrm{d}q_1 h_2\mathrm{d}q_2 h_3\mathrm{d}q_3$

např. sférická soustava souřadnic **objemový element:** $\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

plošný element na povrchu koule o poloměru r: $\mathrm{d}S = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

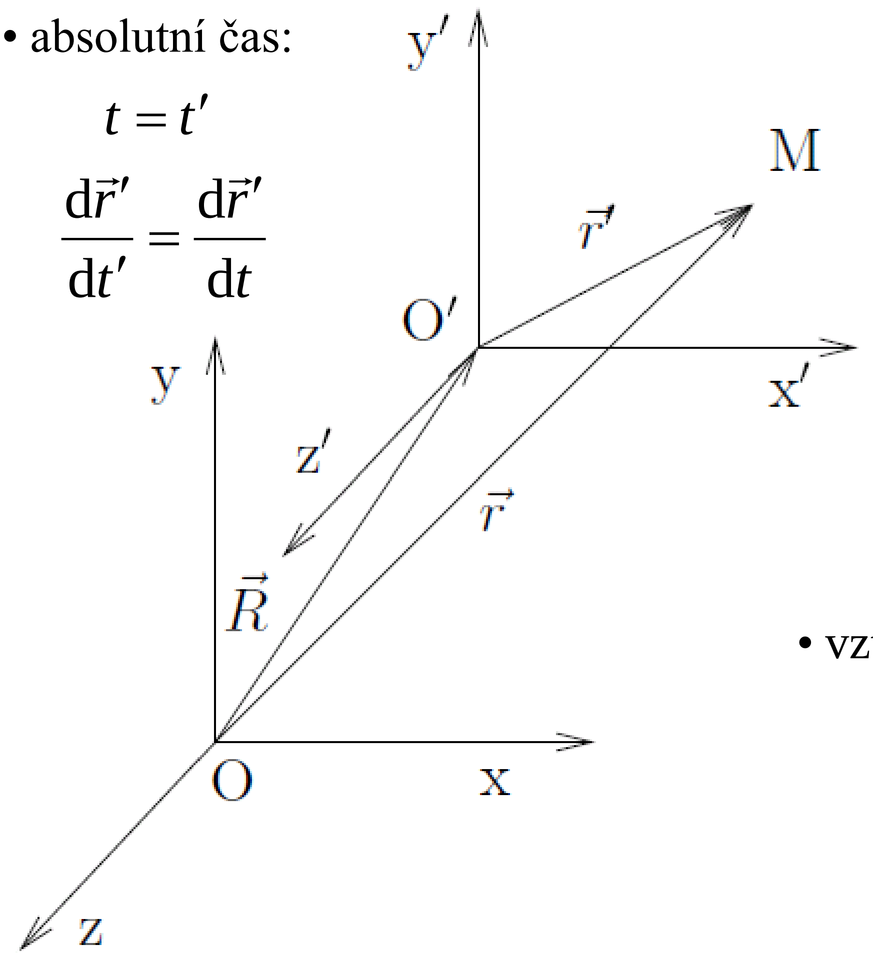
element prostorového úhlu: $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}S / r^2 = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě

- kartézská soustava souřadnic *S*: *x*, *y*, *z*
- pohybující se kartézská soustava *S'*: *x'*, *y'*, *z'*
- absolutní čas:

$$t = t'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$$



- poloha hmotného bodu M:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

- rychlost hmotného bodu M:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$$

- **unášivá, relativní** rychlost: $\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{v}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$
- **adiční teorém** skládání rychlostí: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

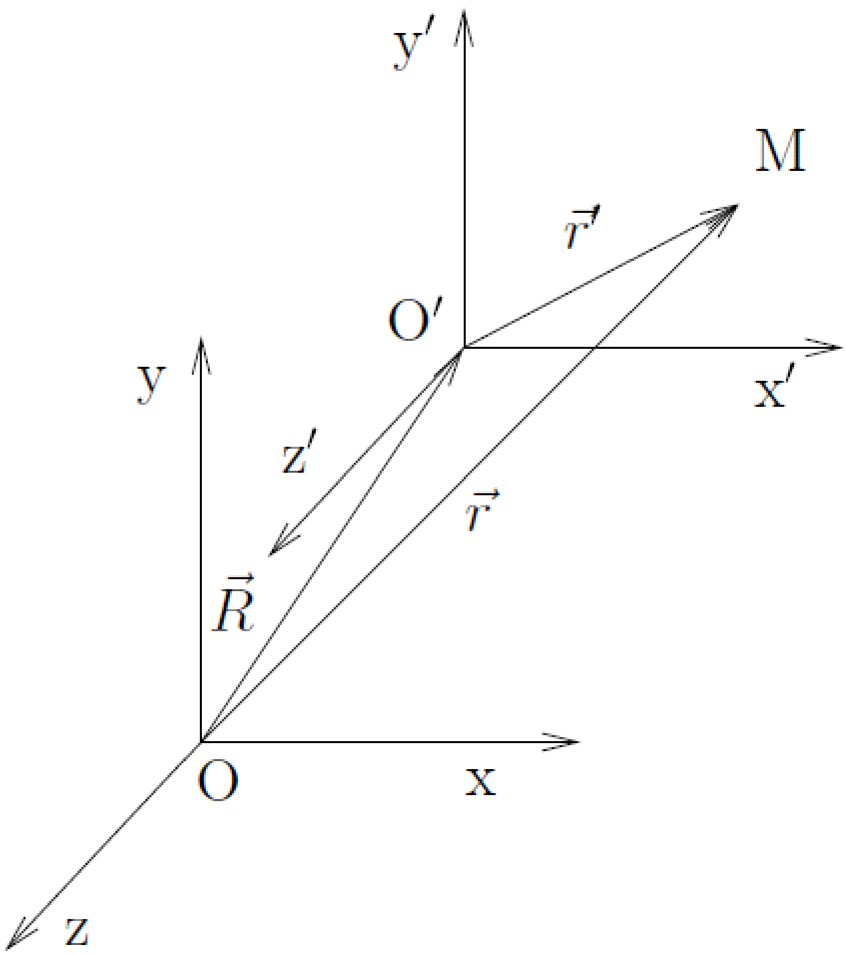
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$$

- vztah mezi **absolutním, relativním a unášivým zrychlením**:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u$$

Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě

- kartézská soustava souřadnic S: x, y, z
- pohybující se kartézská soustava S': x', y', z'



- pohyb hmotného bodu M v **inerciální soustavě**, **Gallileova transformace**:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t, \quad \vec{u} = konst$$

- rychlost hmotného bodu M:

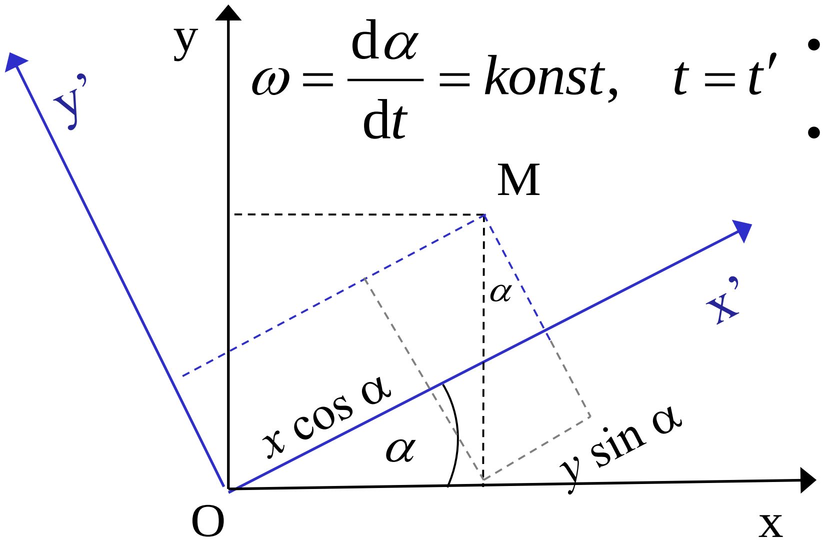
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

- Jelikož je vzájemná rychlost soustav konstantní, budou zrychlení v obou soustavách stejná:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}'$$

Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

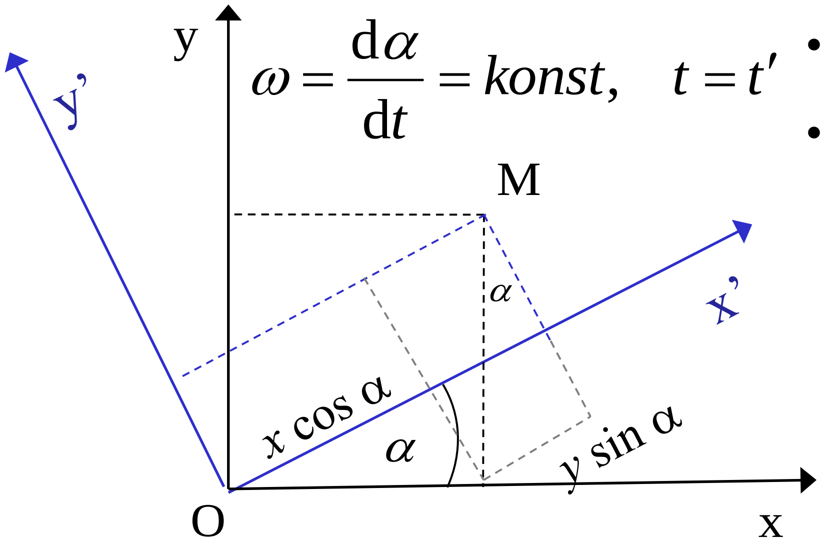
- kartézská soustava souřadnic: *x*, *y*, *z*
- kartézská soustava otáčející kolem osy *z*= *z'*: *x'*, *y'*, *z'*

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$
$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$
$$z' = z$$

$$v'_x = \dot{x}' = v_x \cos\omega t + v_y \sin\omega t + \omega(-x\sin\omega t + y\cos\omega t)$$
$$v'_y = \dot{y}' = -v_x \sin\omega t + v_y \cos\omega t - \omega(x\cos\omega t + y\sin\omega t)$$
$$v'_z = \dot{z}' = \dot{z} = v_z$$

$$a'_x = \dot{v}'_x = a_x \cos\omega t + a_y \sin\omega t + 2\omega(-v_x \sin\omega t + v_y \cos\omega t) - \omega^2(x\cos\omega t + y\sin\omega t)$$
$$a'_y = \dot{v}'_y = -a_x \sin\omega t + a_y \cos\omega t - 2\omega(v_x \cos\omega t + v_y \sin\omega t) - \omega^2(-x\sin\omega t + y\cos\omega t)$$
$$a'_z = \dot{v}'_z = \dot{v}_z = a_z$$

Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

- kartézská soustava souřadnic: *x*, *y*, *z*
- kartézská soustava otáčející kolem osy *z*= *z'*: *x'*, *y'*, *z'*

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$

$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

$$z' = z$$

$$\omega = -\omega'$$

$$v'_x = v_x\cos\omega t + v_y\sin\omega t - \omega' y'$$

$$v'_y = -v_x\sin\omega t + v_y\cos\omega t + \omega' x'$$

$$v'_z = v_z$$

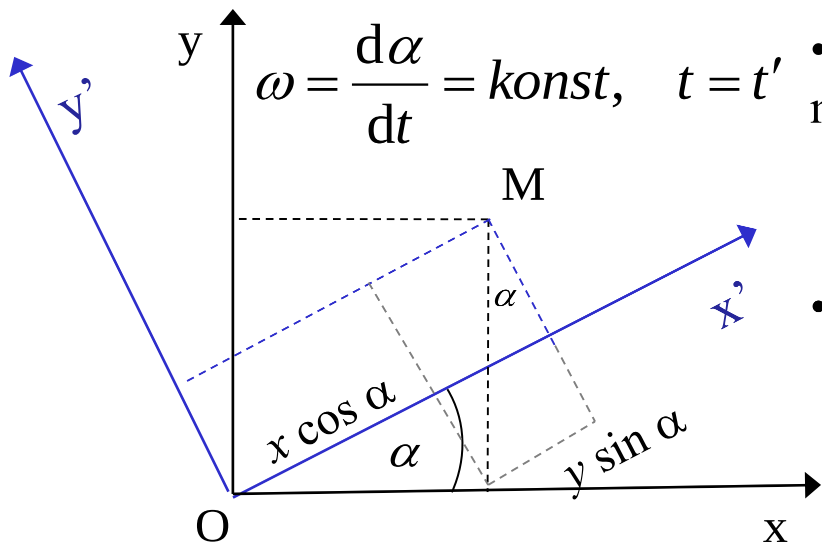
$$a'_x = a_x\cos\omega t + a_y\sin\omega t - 2\omega' v'_y + \omega'^2 x'$$

$$a'_y = -a_x\sin\omega t + a_y\cos\omega t + 2\omega' v'_x + \omega'^2 y'$$

$$a'_z = a_z$$

- složky odstředivého zrychlení: $\vec{a}_O = \left(\omega'^2 x', \omega'^2 y', 0\right)$
- složky Coriolisova zrychlení: $\vec{a}_C = \left(-2\omega' v'_y, 2\omega' v'_x, 0\right)$

Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

• obecnou rotaci kolem libovolně orientované osy můžeme získat složením tří rotací kolem souřadných os.

$$\vec{\omega}' = \left(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z\right)$$

• Coriolisovo zrychlení při rotaci kolem obecné osy:

$$\vec{a}_C = 2\left(\vec{\omega}' \times \vec{v}'\right) = -2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}'\right)$$

• Coriolisovo zrychlení je tedy kolmé jak na vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}'$ (směr rotační osy), tak na rychlost hmotného bodu $\vec{v}'$ v rotující soustavě souřadné.

$$\vec{\omega}' = \left(0,0,\omega'_z\right)$$

$$\vec{a}_C = 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(\omega'_y v'_z - \omega'_z v'_y,\ \omega'_z v'_x - \omega'_x v'_z,\ \omega'_x v'_y - \omega'_y v'_x\right) = 2 \cdot \left(-\omega'_z v'_y,\ \omega'_z v'_x,\ 0\right)$$

• Odstředivé zrychlení zrychlení při rotaci kolem obecné osy: $\vec{a}_O = -\vec{\omega}' \times \left(\vec{\omega}' \times \vec{r}'\right)$

• Velikost odstředivého zrychlení:
r_K je vzdálenost bodu od osy rotace

$$a_O = \omega^2 r \sin\alpha = \omega^2 r_K$$

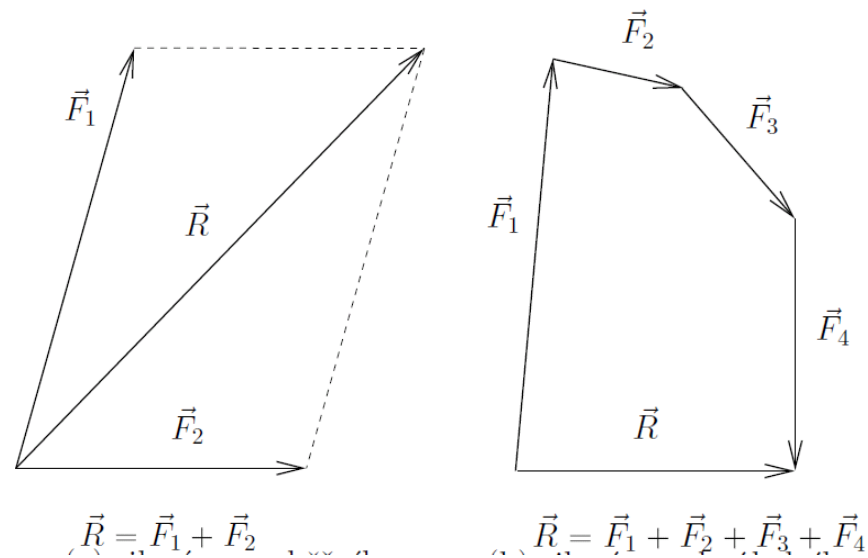
Dynamika hmotného bodu, hybnost, síla

Galileův princip relativity: Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech souřadnicových soustavách, které jsou navzájem v klidu, nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu v tzv. inerciálních souřadných soustavách

Míra posuvného pohybu tělesa - **hybnost:**

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

hmotnost tělesa   rychlost hmotného středu tělesa



Proč se tělesa (hmotné body) pohybují?

Pojem síly je dán osobní zkušeností. Síla může mít buď statický (deformační) nebo dynamický účinek (mění pohybový stav těles) .

Síly jsou vektory, mají tedy své působiště a směr. Síla působící na hmotný bod je vektorem vázaným na bod.

Newtonovy zákony

1. Zákon setrvačnosti: Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu pokud není nuceno vnějšími silami tento svůj stav změnit.

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. Zákon síly: Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.

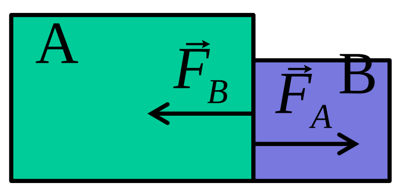
$$\vec{F} = k\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

Kde k je konstanta v soustavě jednotek SI je $k = 1$.
Pokud je hmotnost konstantní ,$v \ll c$ $\Rightarrow$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

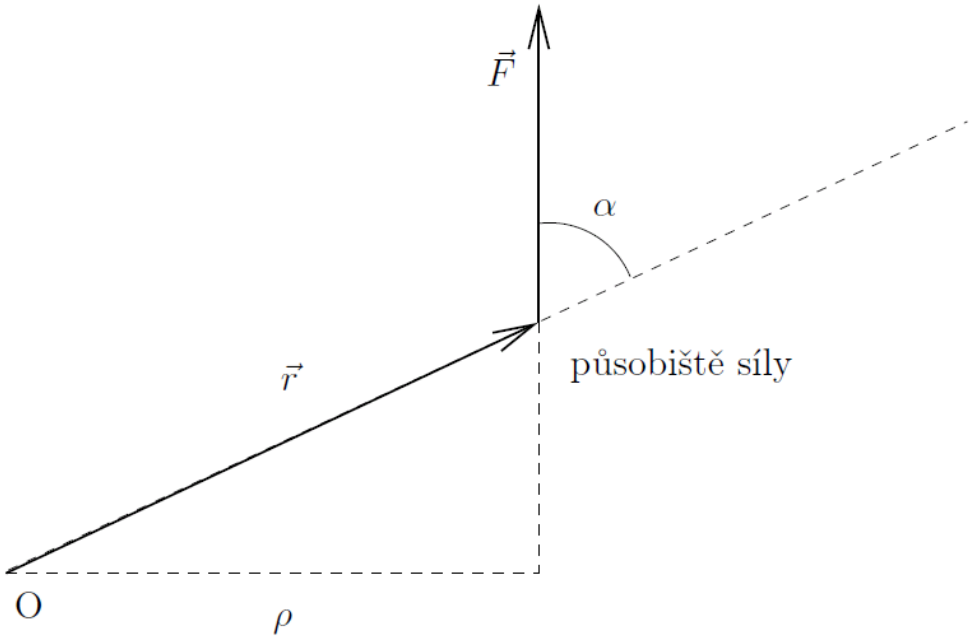
3. Zákon akce a reakce: Každá akce vyvolává reakci opačného směru.Vzájemné síly mezi dvěma tělesy mají vždy stejnou velikost a opačný směr.

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$



Všechny Newtonovy zákony se vztahují na pohyby těles v absolutním čase a prostoru

Newtonovy zákony, moment síly, moment hybnosti



Pro studium kruhového pohybu hmotného bodu (hmotného středu tělesa) zavádíme pojem momentu síly a momentu hybnosti vzhledem k bodu O.

Moment síly: $$\vec{M} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

Jeho velikost je rovna: $M = rF\sin\alpha = F\rho$

Moment hybnosti: $$\vec{b} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Druhý Newtonův zákon vynásobíme zleva vektorově polohovým vektorem:

$$\left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] = m\left(\left[\vec{v} \times \vec{v}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right]\right) = \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]$$

Pohybové rovnice

zákon síly

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m}$$

$$a_z = \frac{F_z}{m}$$

počáteční podmínky

$$x(t = t_0) = x_0$$

$$y(t = t_0) = y_0$$

$$z(t = t_0) = z_0$$

$$v_x(t = t_0) = v_{x_0}$$

$$v_y(t = t_0) = v_{y_0}$$

$$v_z(t = t_0) = v_{z_0}$$

časová závislost souřadnic / rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F_x}{m} \qquad x(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F_y}{m} \qquad y(t)$$

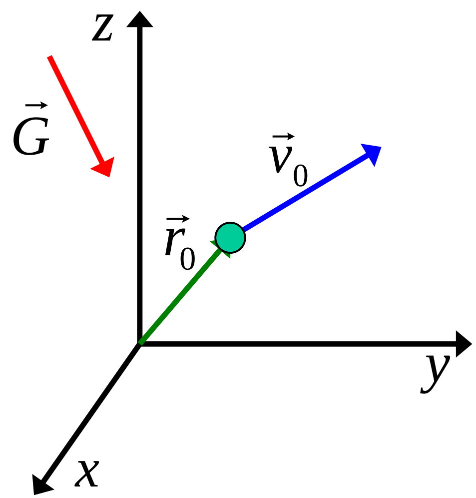
$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F_z}{m} \qquad z(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{F_x}{m} \qquad v_x(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{F_y}{m} \qquad v_y(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{F_z}{m} \qquad v_z(t)$$

Šikmý vrh obecně



Tíha:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = \left(g_x, g_y, g_z\right)$$

Počáteční podmínky:

$$\vec{r}\left(t_0\right) = \vec{r}_0 = \left(x_0, y_0, z_0\right)$$

$$\vec{v}\left(t_0\right) = \vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right)$$

Pohybové rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = g_i, \quad i = x, y, z$$

Řešení:

$$v_i\left(t\right) = g_i t + c_i$$

$$v_i\left(t_0\right) = g_i t_0 + c_i \Rightarrow c_i = v_{0i} - g_i t_0$$

rychlost:

$$v_i = g_i\left(t - t_0\right) + v_{0i}$$

$$v_i\left(t\right) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = g_i\left(t - t_0\right) + v_{0i}$$

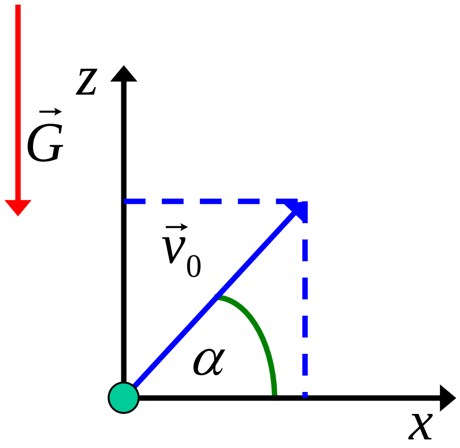
poloha:

$$x = \tfrac{1}{2} g_x\left(t - t_0\right)^2 + v_{0x}\left(t - t_0\right) + x_0$$

$$y = \tfrac{1}{2} g_y\left(t - t_0\right)^2 + v_{0y}\left(t - t_0\right) + y_0$$

$$z = \tfrac{1}{2} g_z\left(t - t_0\right)^2 + v_{0z}\left(t - t_0\right) + z_0$$

Šikmý vrh



Tíha:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = (0,0,-g)$$

Pohybové rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g$$

Počáteční podmínky:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (0,0,0)$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z})$$

Řešení:

$$v_x(t) = c_x, \quad v_z(t) = -gt + c_z$$

$$v_x(0) = c_x \Rightarrow c_x = v_{0x}$$

$$v_z(0) = c_z \Rightarrow c_z = v_{0z}$$

Rychlost:

$$v_x = v_{0x}, \quad v_z = -gt + v_{0z}$$

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{0x}, \quad v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -gt + v_{0z}$$

poloha: $x = v_{0x} t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

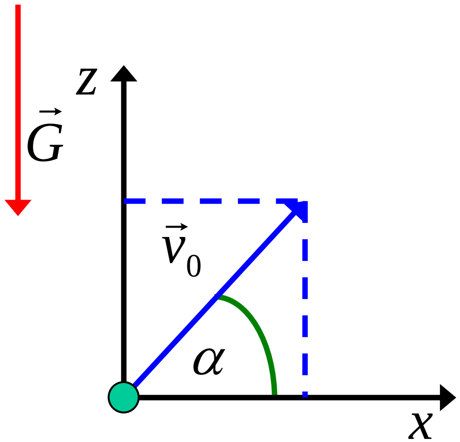
$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t$$

trajektorie:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$

$$z = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Šikmý vrh



Místo dopadu: $z = 0, \quad t = t_D$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha, \quad x = v_0 t \cos\alpha$$

$$0 = -\tfrac{1}{2} g t_D{}^2 + v_0 t_D \sin\alpha \Rightarrow t_D = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$x_D = v_0 t_D \cos\alpha = \frac{2v_0{}^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0{}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Poloha maxima: $v_z = 0, \quad t = t_M$

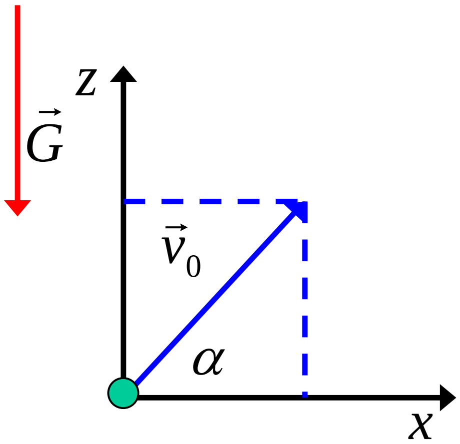
$$v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$0 = -g t_M + v_0 \sin\alpha \Rightarrow t_M = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$x_M = v_0 t_M \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$z_M = -\tfrac{1}{2} g t_M{}^2 + v_0 t_M \sin\alpha = -\tfrac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Šikmý vrh



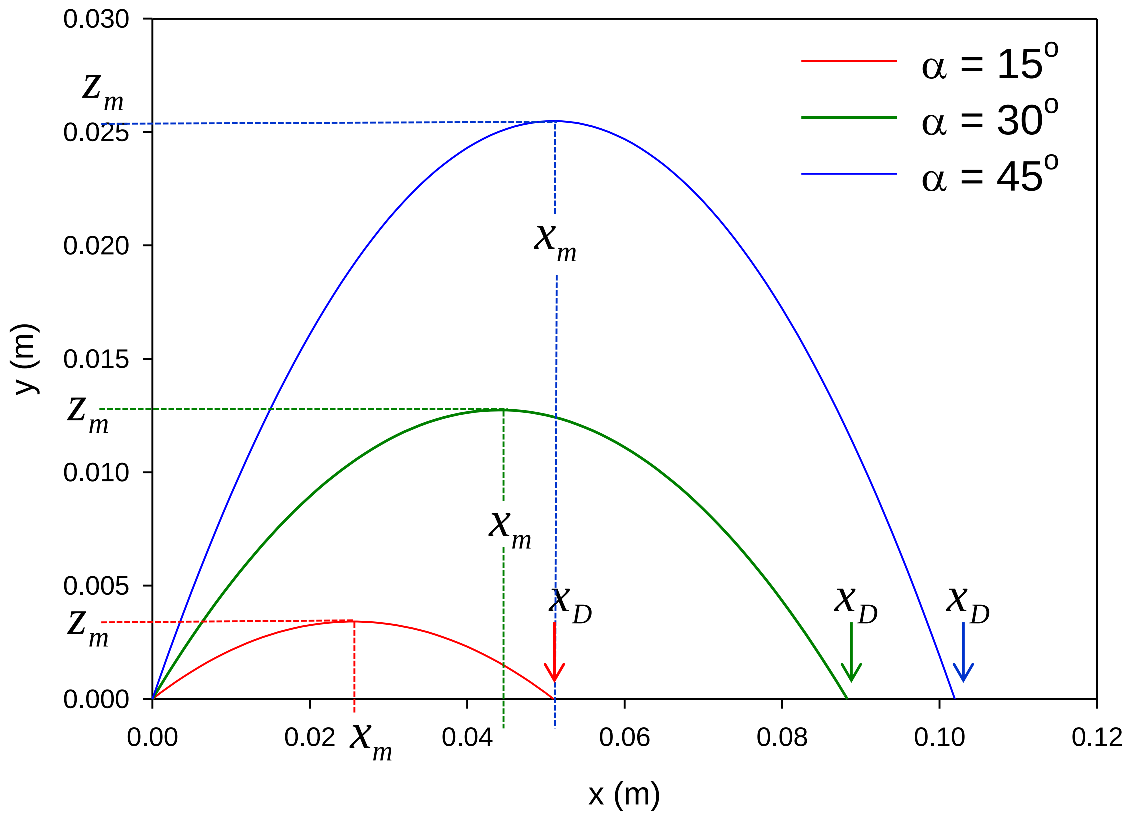
trajektorie:

$$z = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

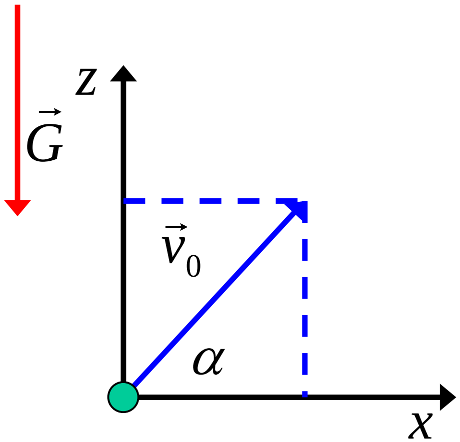
místo dopadu: $x_D = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

poloha maxima: $x_M = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$

výška maxima: $z_M = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$



Šikmý vrh

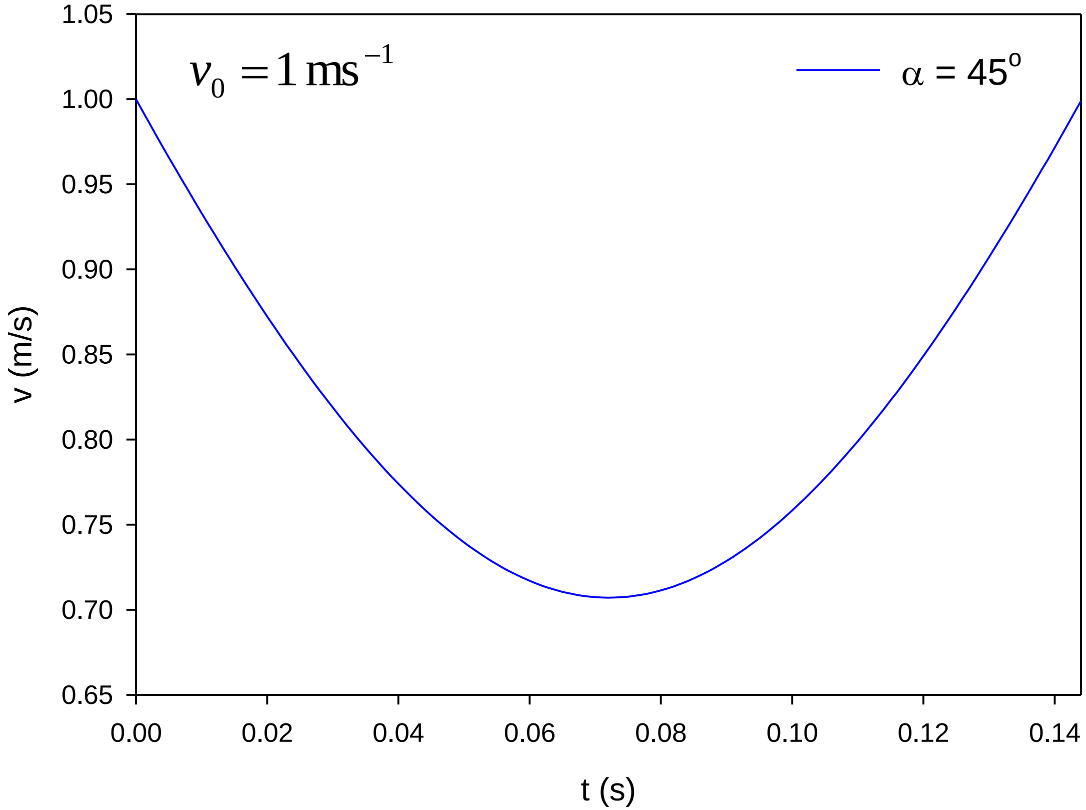


Velikost rychlosti:

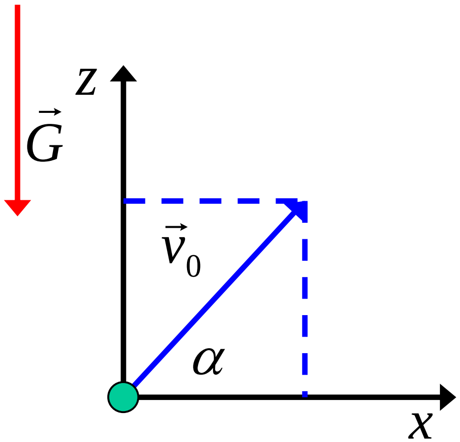
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2} =$$
$$= \sqrt{(v_0)^2 + (gt)^2 - 2gtv_0 \sin\alpha}$$

Rychlost:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$$

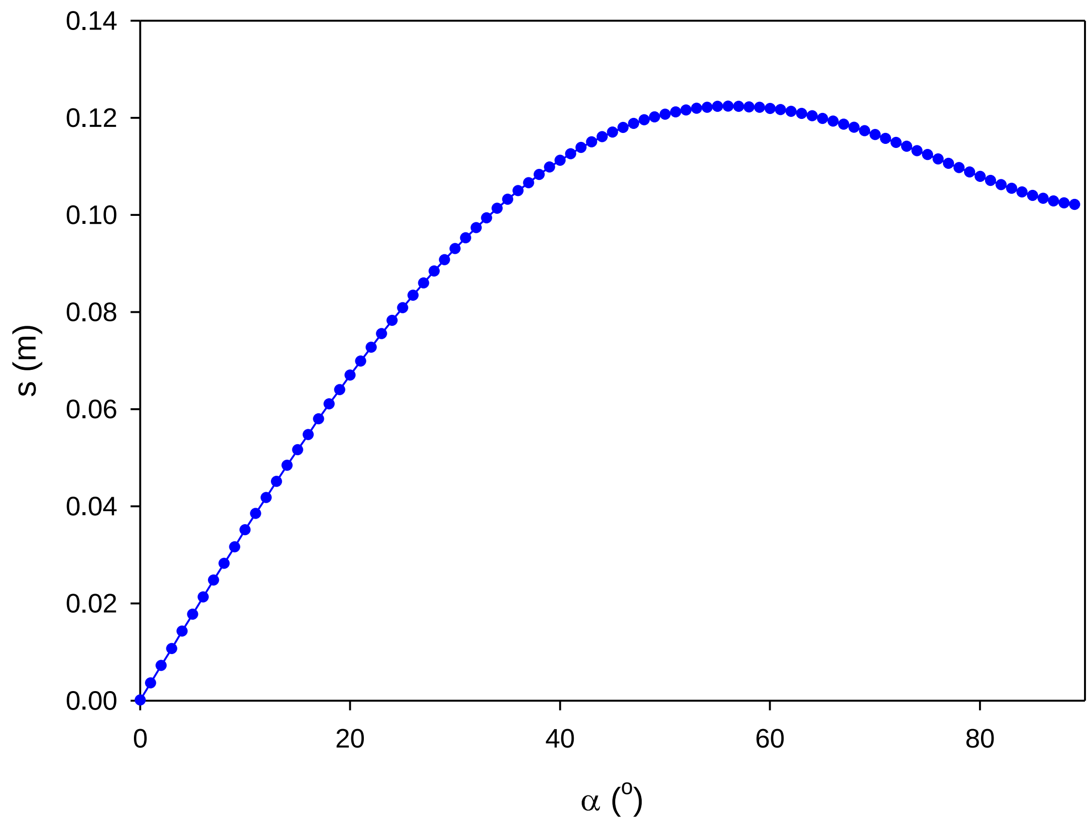


Šikmý vrh

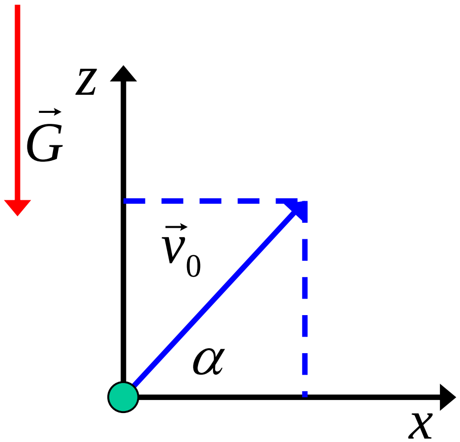


$$s = \int_0^{\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}} \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left(v_0 \sin\alpha - gt\right)^2}\, \mathrm{d}t$$

$$s \equiv \int v(t)\mathrm{d}t$$

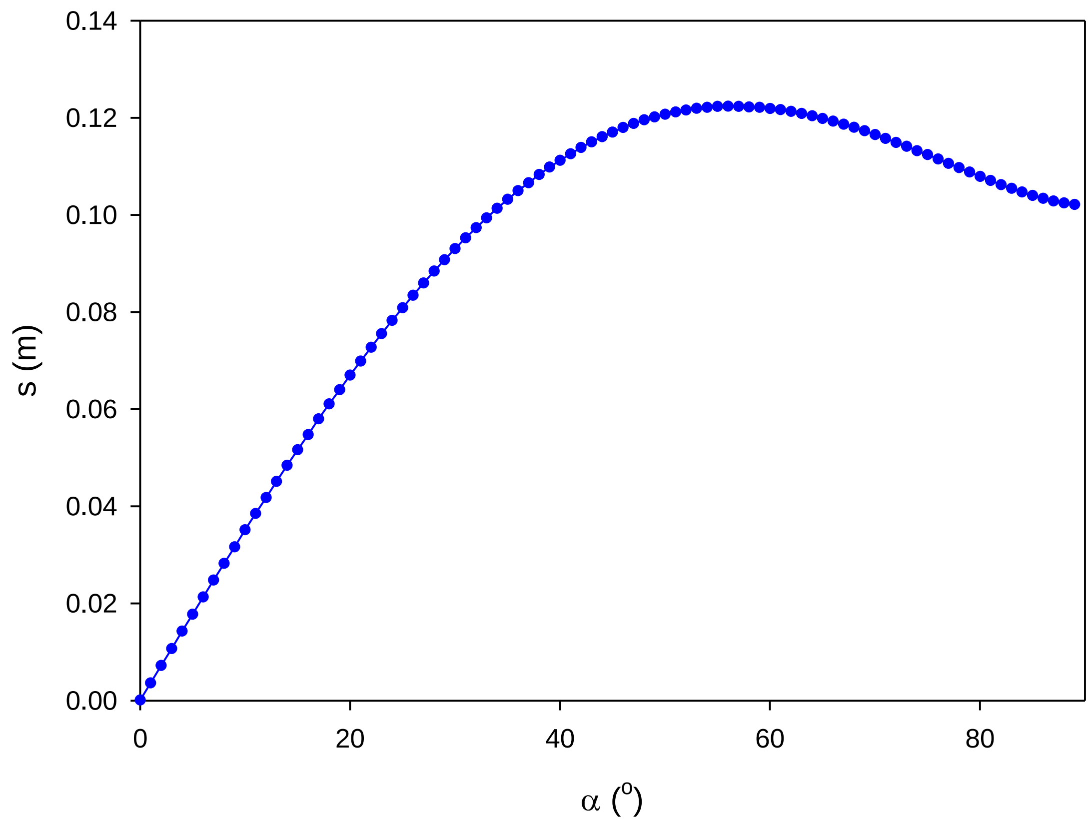


Šikmý vrh



$$s = \frac{v_0^2}{g}\left(\sin\alpha + \cos^2\alpha \ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$s \equiv \int v(t)\,\mathrm{d}t$$



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh bez odporu vzduchu

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

počáteční podmínky

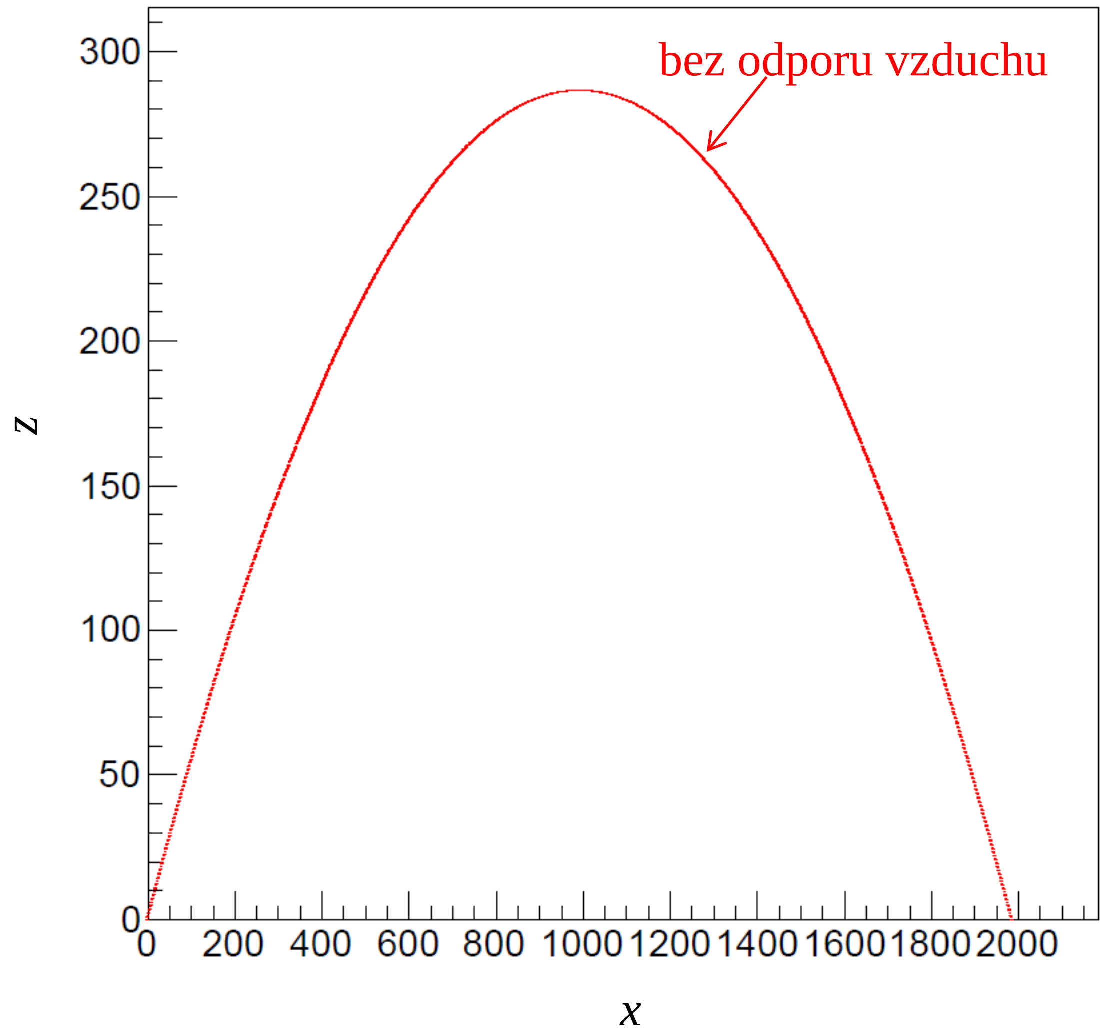
$$x(t=0) = 0$$

$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$

$m = 10$ g, $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 30^{\circ}$



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_o = -h\vec{v}$ $m = 10$ g, $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 30^o$, $h = 10^{-4}$ Ns/m

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -h\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -mg - h\dot{z}$$

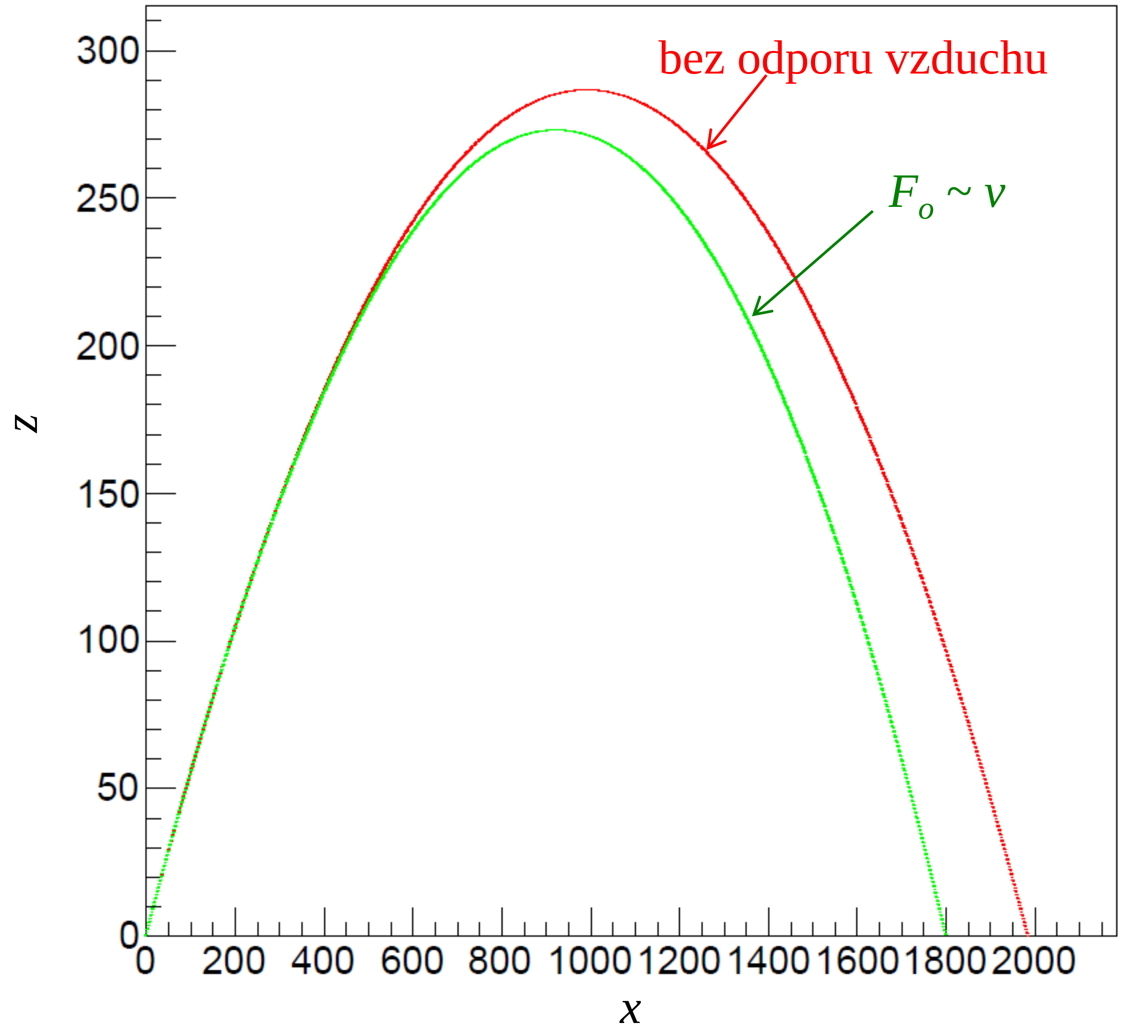
počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$

$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_o = -hv^2 \dfrac{\vec{v}}{v}$

m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°, h = 10^{-5} Ns/m

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -h\dot{x}^2$$

$$m\ddot{z} = -mg - h\dot{z}^2$$

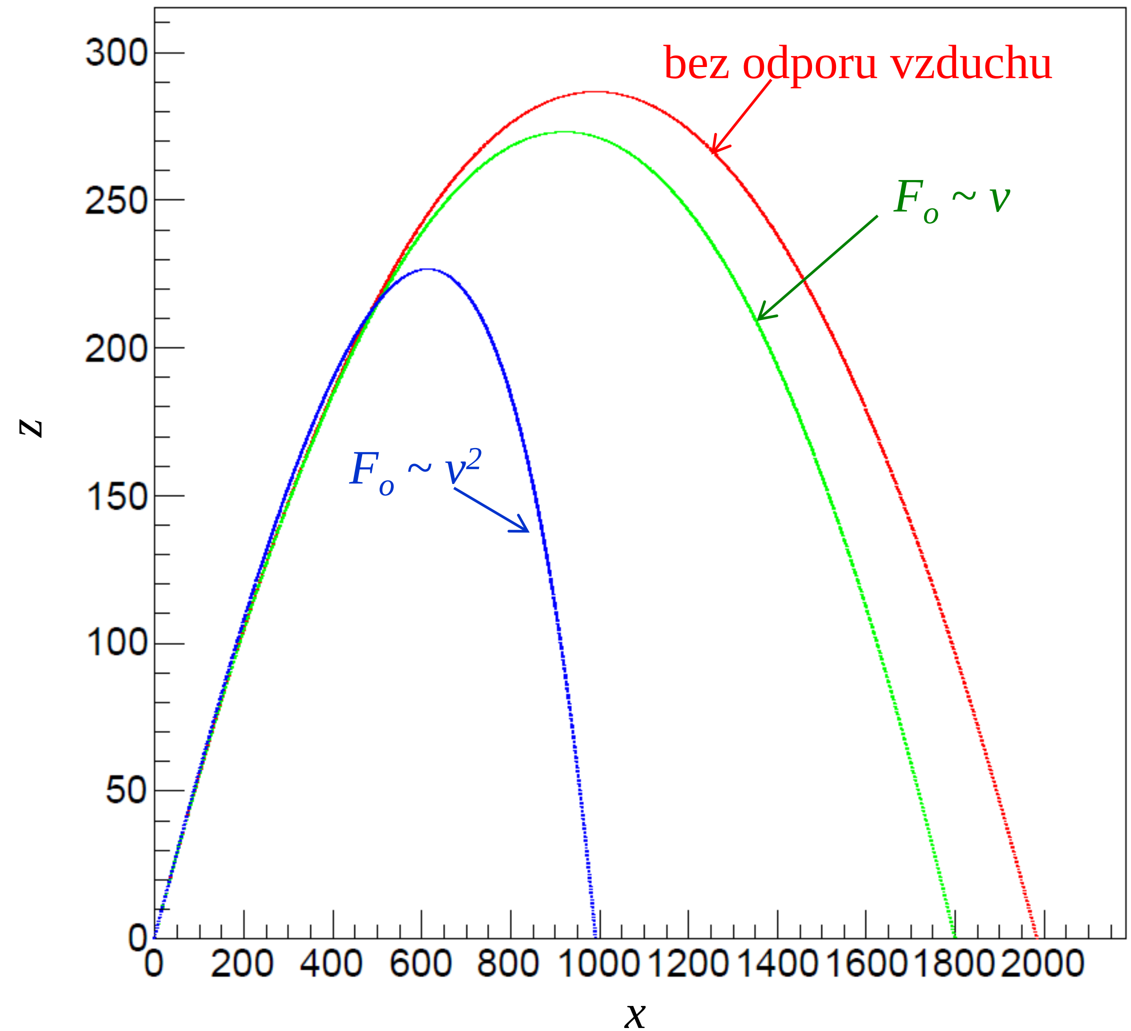
počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$

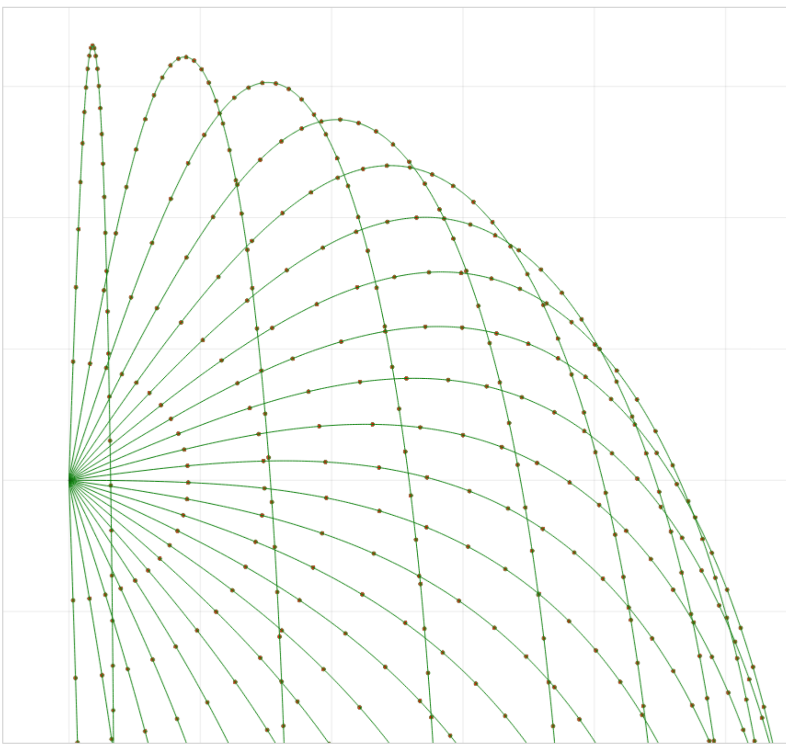
$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

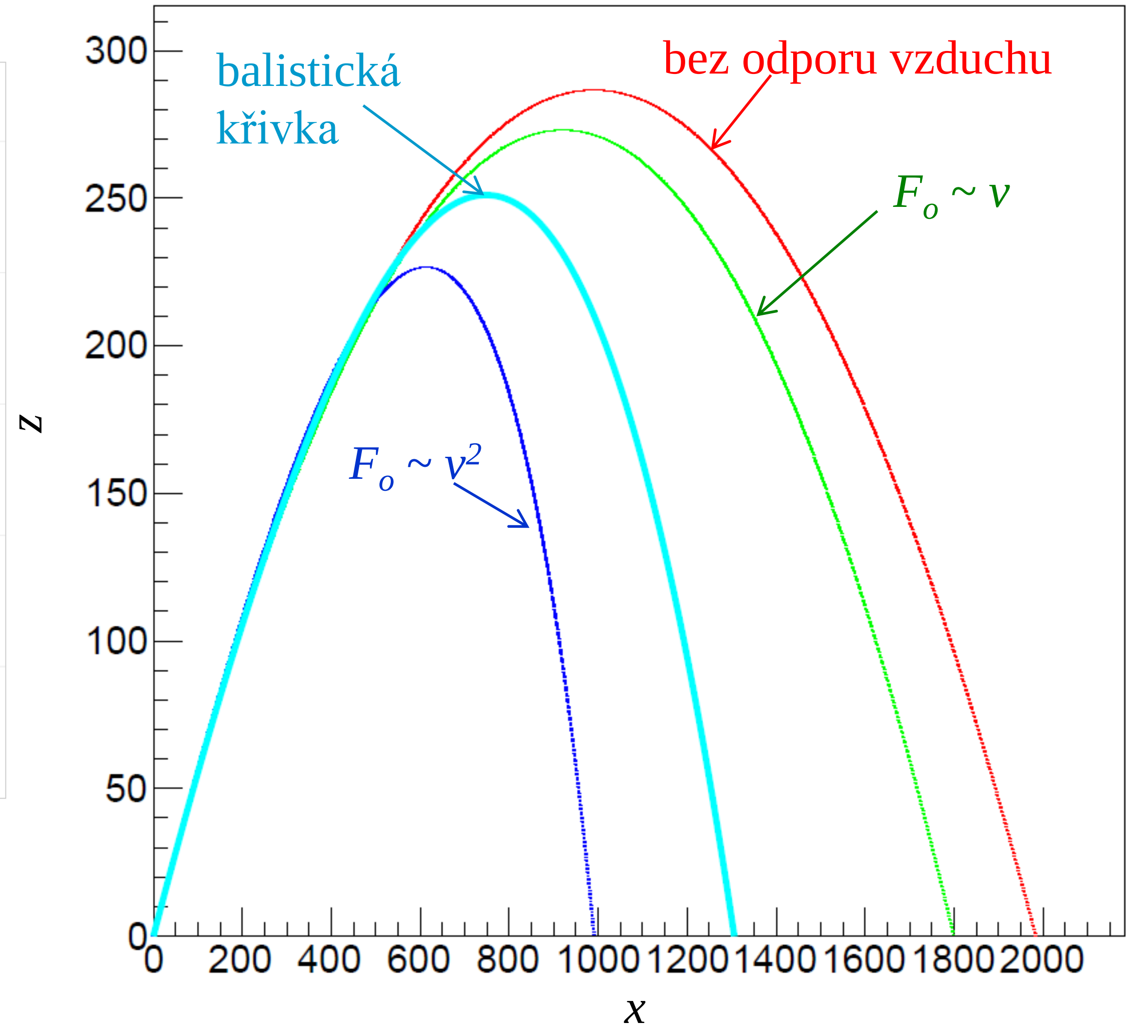
$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$



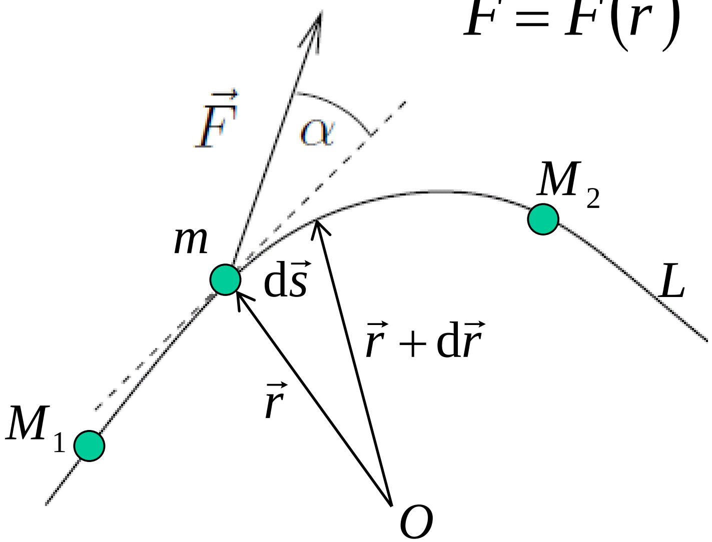
Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu



m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°, h = 10^{-4} Ns/m



Mechanická práce, okamžitý výkon



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- **Elementární práci** definujeme:

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = F\,\mathrm{d}s\cos\alpha, \quad [\mathrm{J}]$$

- Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} \quad [\mathrm{J}]$$

$$A_{12} = \int_{L(M_2)}^{L(M_1)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = -\int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = -A_{21}$$

- Pokud je rovnice křivky zadaná parametricky:

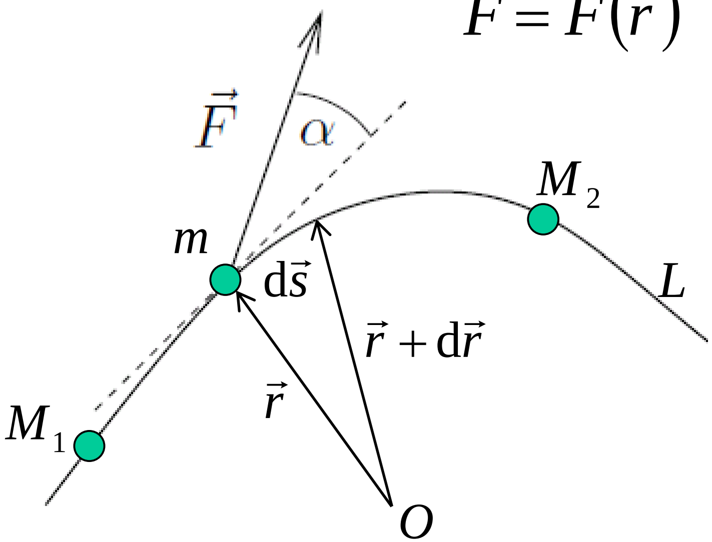
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \vec{v} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dA}{dt} \right) \mathrm{d}t$$

- **Okamžitý výkon** definujeme:

$$P \equiv \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad [\mathrm{W}]$$

Mechanická práce, kinetická energie



$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$$

• Vztah pro elementární práci přepíšeme na tvar:

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{s},\quad \mathrm{d}\vec{s}=\vec{v}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t=m(\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v})=\frac{1}{2}m\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})=$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\mathrm{d}W_k$$

• **Kinetickou energii** hmotného bodu zavedeme vztahem:

$$W_k\equiv E_k\equiv\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{m}\quad[\mathrm{J}]$$

• Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

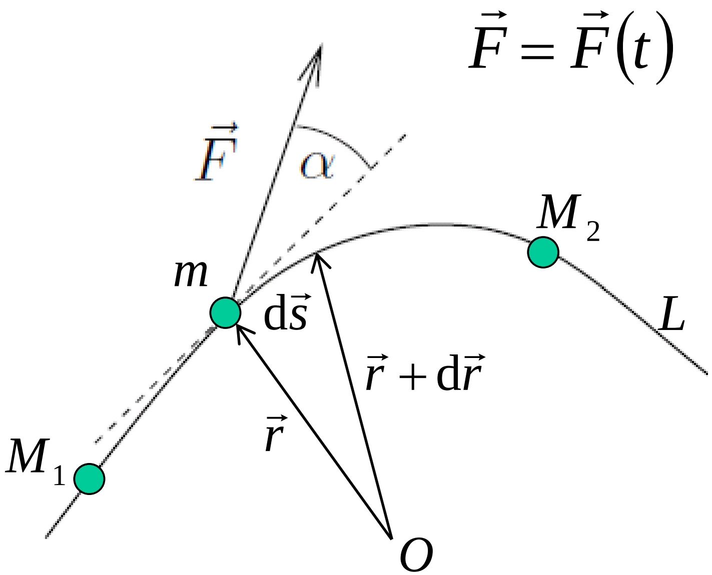
$$\int_{L(M_1)}^{L(M_2)}\mathrm{d}W_\mathrm{k}=[W_\mathrm{k}]_{M_1}^{M_2}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\Delta W_k=A_{21}$$

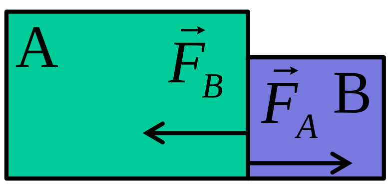
• **Konzervativní** (potenciálová) silová pole:

$$A_{11}=\oint_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0$$

Časový účinek síly, impuls síly, zákon zachování hybnosti

$$\vec{F} = \vec{F}(t)$$





- Změna hybnosti těles je dána působením sil v časovém intervalu <t_1, t_2>:

$$\Delta\vec{p}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \mathrm{d}t \qquad \Delta\vec{p}_B = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \mathrm{d}t$$

- Podle druhého Newtonova zákona se projeví působení síly během elementárního časového intervalu dt elementární změnou hybnosti:

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t, \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

- Integrál na pravé straně nazýváme **Impuls síly**:

$$\vec{J} \equiv \vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{J}$$

- **Zákon zachování hybnosti** plyne ze 3 New. zák.:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \Rightarrow \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0$$

$$\vec{p}_A(t_1) + \vec{p}_B(t_1) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2) = konst.$$